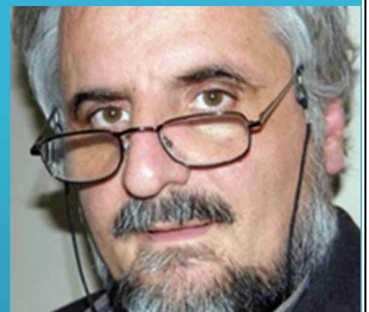
Εκπαιδευτικές Εργασίες (Συλλογή)

Συμπληρωματικός τόμος

7ος

Γιάννης Π. Πλατάρος

2015



Μεσσήνη

2015

Για ποιο λόγο, όλοι τελικά οι αριθμοί, είναι απειροψήφιοι.



Γιάννης Π. Πλατάρος

Μαθηματικός –Οικονομολόγος

ΜΔΕ στην «Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών» (ΕΚΠΑ), Επιμορφωτής Β΄επιπέδου

2/12/2015

ΓΙΑ ΠΟΙΟ ΛΟΓΟ, ΟΛΟΙ ΤΕΛΙΚΑ ΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ, ΕΙΝΑΙ ΑΠΕΙΡΟΨΗΦΙΟΙ.

Για ποιο λόγο, όλοι τελικά οι αριθμοί, είναι απειροψήφιοι.

Γιάννης Π. Πλατάρος

Μαθηματικός

Εισαγωγή: Κατ΄αρχήν, πρέπει να γίνει κατανοητό, ότι τελικά όλοι οι αριθμοί είναι απειροψήφιοι , κόντρα στην κοινή καθημερινή αντίληψη ότι έχουμε πεπερασμένου πλήθους ψηφίων αριθμούς και μάλιστα αυτοί είναι και απείρου πλήθους αφού λ.χ. το σύνολο των Φυσικών $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,5,6,7,8,....\}$ έχει άπειρους στο πλήθος μονοψήφιους. Επομένως ο τίτλος της παρούσης εργασίας είναι ψευδής είτε παραπλανητικός;

Το εξετάζουμε:

- Οι φυσικοί ρητοί και γενικότερα οι ακέραιοι γράφονται όλοι με απειροψήφια μορφή, αφού λ.χ. 1=0,999999….. , 2=1,9999999999…… , 3=2,999999…… κ.ο.κ.
- Οι ρητοί δεκαδικοί που τερματίζονται, γράφονται και αυτοί με άπειρα ψηφία, αφού λ.χ. 1,24=1,2399999…. 3,4567=3,4566999999…….
- Οι ρητοί που δεν είναι δεκαδικοί είναι περιοδικοί με περίοδο διαφορετική από το 9 (που είναι η προηγούμενη κατηγορία) και αυτοί είναι πρωταρχικά απειροψήφιοι, περιοδικοί αριθμοί.
- Οι άρρητοι που είναι κι αυτοί απειροψήφιοι μη περιοδικοί

  Σχηματικά:

<table>
<tr><th colspan="3">Πραγματικοί Αριθμοί $\mathbb{R}$</th></tr>
<tr><td rowspan="3">Ρητοί $\mathbb{Q}$</td><td>Ακέραιοι $\mathbb{Z}$
(Υποκλάση των Ρητών)
Μετατρέπονται σε απειροψήφιους με περίοδο το 9</td><td rowspan="3">Άρρητοι $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$
Έχουν από την φύση τους απειροψήφια μη περιοδική μορφή</td></tr>
<tr><td>Δεκαδικοί τερματιζόμενοι (Υποκλάση των Ρητών)
Μετατρέπονται σε απειροψήφιους με περίοδο το 9) Είναι της μορφής $\frac{A}{2^{\nu}\cdot 5^{\mu}}$ με $\nu,\mu\in\mathbb{N}$ και με το κλάσμα ανάγωγο.</td></tr>
<tr><td>Δεκαδικοί περιοδικοί (Υποκλάση Ρητών)
Έχουν πρωτογενώς απειροψήφια μορφή με οποιαδήποτε περίοδο πλην του 9 . Είναι οποιοδήποτε ανάγωγο κλάσμα που γράφεται διαφορετικά από την προηγούμενη μορφή.</td></tr>
</table>

Με τις παραπάνω εξηγήσεις αποδείξαμε ότι όλοι οι αριθμοί, έχουν απειροψήφια παράσταση και επομένως ο τίτλος της παρούσας εργασίας είναι σωστός. Ωστόσο, πάλι ο τίτλος μοιάζει «δημοσιογραφικός» δηλαδή υπερβολικός[1]. Εξακολουθούν να υπάρχουν άπειροι στο πλήθος αριθμοί με πεπερασμένη παράσταση στο δεκαδικό σύστημα αρίθμησης. Απλώς εμείς υπενθυμίσαμε, ότι μπορούν να μετατραπούν **όλοι** σε απειροψήφιους, **με μη τετριμμένη περίοδο το 0**. Η έκφραση «όλοι τελικά» τι νόημα έχει; (Το «Για ποιο λόγο…» δεν τον έχουμε ακόμα διαπραγματευθεί)

Χρησιμοποιούμε τις προτάσεις:

(Α) «Το σύνολο των ρητών είναι αριθμήσιμο και το σύνολο των αρρήτων υπεραριθμήσιμο»

Η παραπάνω πρόταση, έχει συνέπειες πρακτικές:

- Οι άρρητοι είναι «πιο άπειροι» από τους ρητούς.
- Η έκφραση «πιο άπειροι» είναι κυριολεκτική, καθώς οι ρητοί έχουν την ισχύ του αριθμήσιμου απείρου $\aleph_0$ (Άλεφ μηδέν) και οι άρρητοι την ισχύ του $\aleph_1$ και ισχύει $\aleph_1 = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$
- Το σύνολο των αρρήτων, δεν μπορεί να μπει σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το σύνολο των ρητών. Αν δεχθούμε ότι αυτό είναι εφικτό, μπορούμε να καταλήξουμε σε άτοπο («Διαγώνιο επιχείρημα» του Cantor)
- Το να συγκρίνεις το $\aleph_0$ με το $\aleph_1$, (Άλεφ μηδέν με Άλεφ ένα) είναι οιονεί σύγκριση πεπερασμένου με $\aleph_0$. Αυτό το «οιονεί» μπορεί να υποστηριχθεί μαθηματικά, αν κάνουμε νοητικά πειράματα τύχης με πεπερασμένα σύνολα και με απειροσύνολα.

  Α) Για παράδειγμα: Λαμβάνω στιγμιότυπο, ,απ΄ ό,τι έχει γραφεί στο διαδίκτυο. Όλες τις πληροφορίες. Είναι μια τεράστια σειρά από οκτάδες από τα ψηφία 0 και 1. Τα κείμενα, οι φωτογραφίες, οι ήχοι, τα βίντεο, τα κινούμενα γραφικά, όλα έχουν την κωδικοποίηση 0 και 1. Χαλάω και τις οκτάδες και φτιάχνω με απίστευτα μεγάλη «σούπα» από 0 και 1. Πεπερασμένη, αλλά εκφραζόμενη με έναν επίσης απίστευτο αριθμό ψηφίων από 0 και 1. Αν αρχίσω να βγάζω διαδοχικά και εντελώς τυχαία τα 0 και 1 και να τα βάζω σε οκτάδες, η πιθανότητα να ξαναφτιάξω τα ίδιο στιγμιότυπο διαδικτύου, είναι πολύ μικρή μεν, θετική δε. Το ενδεχόμενο είναι απολύτως εφικτό και μετά από δοκιμές που θα γίνουν σε πεπερασμένο χρόνο, θα το φτιάξω τελικά, με σχεδόν απόλυτη σιγουριά, εντός πεπερασμένου χρόνου και απόλυτη εντός απείρου χρόνου. Οσοδήποτε γρήγορος και να είμαι στις δοκιμές επαναφοράς της σωστής διάταξης του διαδικτύου, η πιθανότητα να το επιτύχω την πρώτη δοκιμαστική φορά είναι $q=1/(2^8 \cdot α!)$, όπου α ο αριθμός των οκτάδων (bytes) Αν ο χρόνος αυτός είναι απίστευτα μικρός, ας πούμε όσο ο χρόνος t που κάνει το φώς να διαπεράσει τον μικρότερο πυρήνα της Φύσης, αυτόν του H_2 [2], τότε η πιθανότητα να

---

[1] *Η υπερβολή γενικώς θεωρείται ότι είναι στοιχείο συστατικό της Δημοσιογραφίας. Για παράδειγμα βλέπετε στον σύνδεσμο την γνώμη ενός εμπείρου δημοσιογράφου, ενώ η γνώμη του δεν είναι μόνο προσωπική. Σε μια εργασία όμως που διεκδικεί τον τίτλο «επιστημονική» έστω και εκλαϊκευτική, δεν έχει θέση, εκτός ίσως από την περίπτωση όπου καθίσταται αντιληπτή από όλους ανεξαιρέτως και δια μιας.* http://www.presspublica.gr/υπερβολική-δόση/

[2] Ο πυρήνας ενός ατόμου έχει μέση διάμετρο 10^{-6}nm $=10^{-6}10^{-9}$m$=10^{-15}$m$=10^{-18}$Km. Αν το φως τρέχει με $3 \cdot 10^5$Km/sec , τότε για να διασχίσει έναν πυρήνα θέλει χρόνο $t=s/v =(10^{-18}\text{Km})/ (3 \cdot 10^5\text{Km/sec})=0{,}3333… \cdot 10^{-23}\text{sec} \cong 3 \cdot 10^{-24}$sec. Επομένως σε 1.000.000.000 χιλιετίες $=10^{12}$έτη$=10^{12} \cdot 235$ ημέρες$=10^{12} \cdot 235 \cdot 24$ώρες$=10^{12} \cdot 235 \cdot 24 \cdot 60$ λεπτά$=10^{12} \cdot 235 \cdot 24$ώρες$=10^{12} \cdot 235 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60sec=3 \cdot 10^{19}$sec. Επομένως, προλαβαίνουμε να πραγματοποιήσουμε $(3 \cdot 10^{19}\text{sec})/(3 \cdot 10^{-24}\text{sec})= 10^{43}$ δοκιμές. Δηλ. Τα **10^{12}έτη δίνουν 10^{43}δοκιμές κ.ο.κ. $10^{12.000.000.000.000}=10^{43.000.000.000.000}$**

μην έχει πραγματοποιηθεί η επανασύσταση του διαδικτύου σε χρόνο 1.000.000.000 χιλιετιών (:= 10^{12} έτη) είναι b(10^{43},0,q)= $\binom{10^{43}}{0} q^0 (1-q)^{43} = 1 \cdot 1 \cdot \left(1 - \frac{1}{2^8 \cdot a!}\right)^{43}$ (*)

Κανονικά δεν γνωρίζουμε το α, άρα δεν μπορούμε να αποφανθούμε. Μπορούμε να του δώσουμε μια υπερεκτίμηση. Κάθε κάτοικος του Πλανήτη, έχει χρησιμοποιήσει 1.000 Terabytes δεδομένων στο διαδίκτυο, ήτοι 7.000.000.000 κάτοικοι πλανήτη ΓηΧ10^{15} bytes/κάτοικο =7Χ10^{24}bytes=*α* .

Άρα το διώνυμο πιθανότητας (*) γίνεται $\left(1 - \frac{1}{2^8 \cdot (7 \cdot 10^{24})!}\right)^{43}$ Την αριθμητική αυτή παράσταση, δεν μπορεί να την υπολογίσει το Mathematica 10 , διότι μαζί με τους διψήφιους εκθέτες του 10 έχουμε και το παραγοντικό (!) τα ο οποίο σύμβολο του παραγοντικού, επελέγη για την έκπληξη που προκαλεί την φανταζόμαστε ως εξής : Στην παρένθεση υπάρχει ένας απειροελάχιστα μικρότερος αριθμός από την μονάδα, όμως σε μια τεράστια δύναμη, το 43 . Γνωρίζουμε ότι $α^ν$→0 , με 0<α<1. Σε μια ισοδύναμη διατύπωση, αυτό μεταφράζεται ότι «για καταλλήλως και «επαρκώς μεγάλο» φυσικό ν, μπορούμε να πλησιάσουμε την πιθανότητα όσο θέλουμε κοντά στο 0 . Δηλαδή, υπάρχει πεπερασμένος χρόνος, όπου λ.χ. η πιθανότητα να μην έχει αναπαραχθεί το διαδίκτυο να είναι σχεδόν απίθανη. Μόνο σε άπειρο επιτελεσμένο χρόνο (:=ενεργεία άπειρο) έχω βεβαιότητα. Δεν θα αποφύγουμε τελικά την φιλοσοφική αβεβαιότητα, διότι πάντα υπάρχει πιθανότητα έστω και σχεδόν μηδενική να μην έχει ανασυσταθεί σε όποιο χρόνο επιλέγω κάθε φορά οσοδήποτε μεγάλο και να τον επιλέξω κάθε συγκεκριμένη φορά.

Από αυτό το παράδειγμα κρατάμε *ότι για οποιοδήποτε απίθανο με τα ανθρώπινα κριτήρια ενδεχόμενο όπως το να επανασυσταθεί τυχαία το διαδίκτυο από μια τεράστια σούπα με 0 και 1 που περιέχει «μόνο» 2^8Χ7Χ10^{24} ψηφία από 0 και 1 και μάλιστα 0 και 1 με ιδιοταυτότητα το κάθε ένα, δηλ. να πάνε τα αυθεντικά 0 και 1 στην αρχική θέση που ήταν πριν αποδομήσουμε το διαδίκτυο σε σούπα με 0 και 1, είναι θετική και όσο θέλουμε κοντά στο 1 (=βεβαιότητα) αρκεί να έχουμε επαρκώς κατάλληλα μεγάλο χρόνο.*

Β) Ας πάρουμε τον αριθμό των κόκκων άμμου που χωράει το Σύμπαν αν δεν υπήρχαν τα τεράστια κενά που υπάρχουν (Σύμπαν εννοούμε μέχρι εκεί που έχει φθάσει το Φως , από την στιγμή της Μεγάλης έκρηξης. Το νούμερο χωράει στο χαρτί και γράφεται με λίγα ψηφία. Είναι της τάξης του 10^{64}. Αν χαρτογραφήσω αυτή την άμμο συνδέοντας όλους τους κόκκους της με μια νοητή κλωστή σαν κομπολόι φτιάχνοντας ένα Συμπαντικό κομπολόι. Αυτό το κομπολόι καταγράφει έναν αριθμό από τον πρώτο κόκκο άμμου, ως τον τελευταίο. (ο τελευταίος δεν μένει σταθερός, καθώς το σύμπαν επεκτείνεται ακτινικά-σφαιρικά, με ταχύτητα φωτός . Παίρνουμε ένα στιγμιότυπο) Έτσι, κάθε κόκκος χαρακτηρίζεται από έναν αριθμό που είναι και η συντεταγμένη του στο κομπολόι σταθερού σχήματος νήματος. Αν ανακατέψω και πάλι νοητά ατή της σούπα άμμου και μετά εξαγάγω ένα προς ένα κόκκους και τους βάζω στο κομπολόι ξεκινώντας από την αρχή, η πιθανότητα να ξαναμπούν όλοι οι κόκκοι στην σωστή θέση, είναι p=1/(10^{64}!) Η πιθανότητα να το πετύχω αυτό 1.000 φορές σερί και να μπουν οι κόκκοι της άμμου χίλιες φορές στην σωστή τους θέση κάνοντας το πείραμα μόνο 1.000 φορές, είναι q= 1/[(10^{64}!)]$^{1.000}$ Φυσικά δεν υπάρχει άνθρωπος που μπορεί να φανταστεί πόσο κοντά στο 0 είναι ο προηγούμενος αριθμός που με τόση αναπαραστατική λιτότητα γράψαμε ή (όπερ το αυτό) πόσο μεγάλος είναι ο παρανομαστής αυτού του κλάσματος. Και φυσικά, μπορούμε να γράψουμε πολύ-πολύ μεγαλύτερους.

Από τα προηγούμενα κρατάμε ότι για ένα «πραγματικά απίθανο» ενδεχόμενο (=να βάλουμε τους κόκκους άμμου που χωράνε στο Σύμπαν στην ίδια θέση 1.000 φορές σερί, αφού πρώτα τους ανακατώσουμε καλά!) η πιθανότητα q, είναι μεγαλύτερη του μηδενός.
Η Πιθανότητα όμως να βγάλω από το σύνολο των Φυσικών αριθμών $\mathbb{N}$ έναν αριθμό από το 1 έως το 10^{64}, είναι 0, όπως προκύπτει από το μέτρο της πιθανότητας που είναι η

$p'=\lim_{\nu\to\infty}\frac{10^{64}}{\nu}=0$. Η Πιθανότητα να βγάλω ζυγό φυσικό είναι q=$\lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{\nu}{2}\right]}{\nu}=\frac{1}{2}$. Η πιθανότητα να βγάλω τέλειο τετράγωνο (είναι άπειρα τα τέλεια τετράγωνα) είναι r=$\lim_{\nu\to\infty}\frac{\left[\sqrt{\nu}\right]}{\nu}=0$, όπου [...] η συνάρτηση ακέραιο μέρος . Η διαισθητική κατανόηση του αποτελέσματος βοηθιέται από το γεγονός, ότι *«υπάρχουν οσοδήποτε μεγάλα διαστήματα διαδοχικών φυσικών, όπου κανείς δεν είναι πρώτος.»* Αυτό φαίνεται από την ταυτότητα $(\nu+1)^2-\nu^2=2\nu+1$. Για παράδειγμα ανάμεσα στον $1.000.001^2$ και στον $1.000.000^2$ υπάρχουν 2.000.001 διαδοχικοί φυσικοί, όπου κανείς δεν είναι τέλειο τετράγωνο. Ανάλογο αποτέλεσμα – συμπέρασμα ισχύει και για τους πρώτους αριθμούς που κι αυτοί είναι άπειροι και η πιθανότητα εξαγωγής πρώτου από τους Φυσικούς είναι 0, ενώ και στους Φυσικούς, υπάρχουν οσοδήποτε μεγάλα διαστήματα διαδοχικών Φυσικών, όπου κανείς τους δεν είναι πρώτος. (Βλέπε ΕΔΩ και εδώ) Το πραγματικά εντυπωσιακό που καλείται να κατανοήσει ο αναγνώστης είναι το ίδιο το αποτέλεσμα: Πιθανότητα εξαγωγής τελείου τετραγώνου από τους Φυσικούς ίση με 0, ενώ οι Φυσικοί με τα τέλεια τετράγωνα τίθενται σε 1-1 και επί απεικόνιση όπως φαίνεται από το σχήμα $\nu\leftrightarrow\nu^2$ (Δηλ. κάθε $\nu\in\mathbb{N}$ αντιστοιχίζεται στο ν^2 στους Τετράγωνους και κάθε ν^2 στους Τετράγωνους αντιστοιχίζεται στο ν . Έτσι έχουμε το 1-1 και επί της αντιστοίχισης , όμως η πιθανότητα εξαγωγής τετράγωνου από τους Φυσικούς, είναι 0 ακριβώς. Η θεώρηση της δυνατότητας 1-1 αντιστοίχισης των συνόλων, υποδηλοί, ότι τα δύο άπειρα σύνολα είναι ισοπληθικά της πρώτης τάξεως του απείρου, του άλεφ μηδέν (=$\aleph_0$) όπως παριστάνουμε την ισχύ του αριθμήσιμου απείρου του συνόλου των Φυσικών $\mathbb{N}$.
Αν επιχειρήσουμε να βρούμε την πιθανότητα εξαγωγής ρητού (στο $\mathbb{Q}$) αριθμού από το σύνολο των Πραγματικών $\mathbb{R}$ θα χρειαστεί να υπολογιστεί ο λόγος $\frac{\mu(\mathbb{Q})}{\mu(\mathbb{R})}$ όπου το μ(...) είναι η «συνάρτηση μέτρο» που μπορούμε να την φανταστούμε ως την έννοια ενός μήκους του συνόλου. Σύμφωνα με την Θεωρία μέτρου, είναι ο λόγος ίσος με $\frac{0}{\infty}=0$. Στο ίδιο αποτέλεσμα που είναι εντυπωσιακότερο, καταλήγω, αν υπολογίσω την πιθανότητα εξαγωγής ρητού από το σύνολο-διάστημα [0,1] Έχω $p=\frac{\mu(\rho\eta\tau o\acute{\iota}\ \sigma\tau o[0,1])}{\mu([0,1])}=\frac{0}{1}=0$.
Εδώ βεβαίως το $\mathbb{Q}$ και το $\mathbb{R}$ δεν τίθενται σε 1-1 αντιστοιχία.

Συνοψίζουμε, επεκτείνουμε και παραθέτουμε περισσότερα δεδομένα και αποτελέσματα:

- Έχω την ευθεία των Πραγματικών αριθμών. Πάνω της υπάρχουν- απεικονίζονται, ρητοί και άρρητοι. Η ονοματοδοσία-παράσταση των αριθμών, μπορεί να γίνει σύμφωνα με οποιοδήποτε σύστημα αρίθμησης.

- Οι ακέραιοι απεικονίζονται με περατούμενη παράσταση.
- Από τους Ρητούς, απεικονίζονται με περατούμενη παράσταση μόνο η απειροελάχιστη κλάση ρητών της μορφής $\frac{A}{2^{\nu}5^{\mu}}$ προκειμένου για το δεκαδικό σύστημα αρίθμησης και όπου το κλάσμα ανάγωγο . Αν είχα δωδεκαδικό σύστημα αρίθμησης, με περατούμενη παράσταση θα παριστάνοντο οι αριθμοί της κλάσης των ρητών της μορφής $\frac{B}{2^{\nu}3^{\rho}}$ Δηλαδή, ο παρονομαστής είναι οι διαφορετικοί πρώτοι που προκύπτουν από την ανάλυση της βάσης του συστήματος αρίθμησης σε γινόμενο πρώτων.
- Κάθε ρητός , μπορεί να έχει περατούμενη ή περιοδική μορφή ανάλογα στο σύστημα αρίθμησης που έχει γραφεί για παράδειγμα: $\left(\frac{1}{3}\right)_{\text{Βάση}10} = 0,33333333333333....._{\text{Βάση}10} = \left(\frac{1}{10}\right)_{\text{Βάση}3} = 0,1_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta 3}$
- Η Πιθανότητα εξαγωγής Ρητού από τους Πραγματικούς, είναι 0.
- Αν εισάγω στους πραγματικούς $\mathbb{R}$, άπειρα **<u>διακριτά</u>** αριθμήσιμα αντίγραφα των Ρητών, δηλαδή αν εισάγω το σύνολο $X=\bigcup_{\iota=1}^{\infty}\mathbb{Q}_{\iota}$ και επιχειρήσω να εξαγάγω ένα αριθμό, η πιθανότητα να εξαγάγω ρητό, είναι πάλι....0!
- Η απειρία των Ρητών $\mathbb{Q}$ ως προς την απειρία των Αρρήτων $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ είναι όπως το πεπερασμένο προς το άπειρο, δηλ. 0.
- Το σύνολο του Cantor, είναι ένα υποσύνολο του [0,1] που έχει «πιο άπειρα» (=περισσότερα) στοιχεία από το $X=\bigcup_{\iota=1}^{\infty}\mathbb{Q}_{\iota}$ που ορίσαμε προηγουμένως. Η κατασκευή του, ορίζεται ως εξής: ξεκινά από ένα ευθύγραμμο τμήμα -διάστημα. Το χωρίζουμε σε 3 ίσα τμήματα και αφαιρούμε το μεσαίο. στα δύο εναπομένοντα, εφαρμόζουμε τον ίδιο κανόνα κ.ο.κ. επ΄άπειρον. Στο πρώτο βήμα έχουμε 2 τμήματα με μήκος 1/3 έκαστο, στο δεύτερο 2^2 με μήκος $(1/3)^2$ έκαστο , επαγωγικά στο ν-οστό βήμα 2^{ν} τμήματα με μήκος $(1/3)^{\nu}$ έκαστον . Επ΄ άπειρον όπου και ορίζεται το Σύνολο Cantor, έχουμε συνολικό μήκος $(2/3)^{\nu} \rightarrow 0$. Δηλ. Το μήκος του Συνόλου Cantor, είναι 0. Το μέτρο του είναι 0, ή συμβολικά μ(C) =0 . Μπορεί να αποδειχθεί και υπεραριθμήσιμο. Δηλ. ότι δεν τίθεται σε 1-1 αντιστοιχία με το $\mathbb{N}$, διότι έχει παραπάνω στοιχεία από αυτό . Παραπάνω ακόμα και από το απίστευτα μεγάλο $X=\bigcup_{\iota=1}^{\infty}\mathbb{Q}_{\iota}$. Η ιδέα της απόδειξης είναι εύκολη και βασίζεται στο γνωστό διαγώνιο επιχείρημα του Cantor. Για να γίνει κατανοητή η απόδειξη, πρέπει να αποκρυπτογραφηθεί η κατασκευή του συνόλου Cantor, ως εξής: Φανταζόμαστε, ότι στο αρχικό σύνολο [0,1] μετράμε όλους τους αριθμούς στο τριαδικό σύστημα αρίθμησης. Το τριαδικό σύστημα, χρησιμοποιεί τα ψηφία 0,1,και 2 . Όταν στο πρώτο βήμα πετάω το μεσαίο τμήμα, στην ουσία, πετάω όλους όσους το δεύτερο ψηφίο τους είναι 2. Στο δεύτερο βήμα , πετάω όλους όσους έχουν ως δεύτερο δεκαδικό το 2. Τους έχοντες μορφή 0,α2... όπου α=0ή 1 διότι την τιμή 2 την έχω ήδη αποκλείσει. Στην πραγματικότητα, το σύνολο Cantor, ορίζεται και με τον ισοδύναμο τρόπο . ότι το C είναι το σύνολο των πραγματικών αριθμών στο [0,1], όπου η τριαδική τους αναπαράσταση δεν περιέχεται το ψηφίο 2. Με



αυτή την κατασκευή ο Cantor, έφτιαξε το σύνολο C={ χ: χ= $0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\ldots\alpha_\nu\ldots$ με το i να διατρέχει το $\mathbb{N}$ και $\alpha_i \in \{0,1\}$}

Ο Cantror, χρησιμοποίησε την εις άτοπον απαγωγή. Υπέθεσε ότι το C τίθεται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το $\mathbb{N}$ και κατέληξε σε άτοπο. Να δούμε πώς: Υπέθεσε ότι υπάρχει το παρακάτω σχήμα, όπου τα στοιχεία του C, όντως αντιστοιχίζονται με τα στοιχεία του $\mathbb{N}$ σε 1-1 και επί αντιστοίχιση.

$0,\ \alpha_{11}\alpha_{12}\alpha_{13}\alpha_{14}\ \alpha_{15}\alpha_{16}\alpha_{17}\alpha_{18}\ \alpha_{17}\alpha_{110}\ldots\alpha_{1,\nu}\ldots.$ ←→1

$0,\ \alpha_{21}\alpha_{22}\alpha_{23}\alpha_{24}\ \alpha_{25}\alpha_{26}\alpha_{27}\alpha_{28}\ \alpha_{29}\alpha_{210}\ldots\alpha_{2,\nu}\ldots.$ ←→2

$0,\ \alpha_{31}\alpha_{32}\ \alpha_{33}\alpha_{34}\ \alpha_{35}\alpha_{36}\alpha_{37}\alpha_{38}\ldots\alpha_{3,\nu}\ldots.$ ←→3

$0,\ \alpha_{41}\alpha_{42}\alpha_{43}\ \alpha_{44}\ \alpha_{45}\alpha_{46}\alpha_{47}\alpha_{48}\ \alpha_{49}\alpha_{410}\ldots\alpha_{4,\nu}\ldots.$ ←→4

$0,\ \alpha_{51}\alpha_{52}\ \alpha_{5\ 3}\alpha_{54}\alpha_{55}\ \alpha_{56}\alpha_{57}\alpha_{5,8}\alpha_{59}\alpha_{5,10}\ldots\alpha_{5,\nu}\ldots.$ ←→5

$0,\ \alpha_{61}\alpha_{62}\alpha_{63}\ \alpha_{64}\ \alpha_{65}\ \alpha_{66}\ \alpha_{67}\alpha_{68}\alpha_{69}\alpha_{610}\ldots\alpha_{6\nu}\ldots.$ ←→6

$0,\ \alpha_{71}\alpha_{72}\ \alpha_{73}\alpha_{74}\ \alpha_{75}\ \alpha_{76}\ \alpha_{77}\ \alpha_{78}\alpha_{79}\alpha_{710}\ldots\alpha_{7,\nu}\ldots.$ ←→7

$0,\ \alpha_{81}\alpha_{82}\alpha_{83}\alpha_{84}\ \alpha_{85}\alpha_{86}\alpha_{87}\ \alpha_{8,8}\ \alpha_{89}\alpha_{810}\ldots\alpha_{8,\nu}\ldots.$ ←→8

………………………………………………………………… ←→…

………………………………………………………………… ←→…

$0,\ 0,\alpha_{\nu1}\alpha_{\nu2}\alpha_{\nu3}\alpha_{\nu4}\ \alpha_{\nu5}\alpha_{\nu6}\alpha_{\nu7}\alpha_{\nu8}\ \alpha_{\nu9}\ \alpha_{\nu10}\ldots\alpha_{\nu\nu}\ldots\ldots.$ ←→ν

………………………………………………………………… ←→…

………………………………………… …………………… ←→…

Όλα τα παραπάνω α_{ij} είναι όλα 0 ή 1. Είπε ο Cantor: Σχηματίζω έναν αριθμό ως εξής: Κοιτάω στον πίνακα το πρώτο ψηφίο του πρώτου αριθμού μετά την υποδιαστολή. Το α_{11}. Αυτό θα είναι 0 ή1. Αν είναι 0 γράφω 1, αν είναι 1, γράφω 0.

Βλέπω τι είναι το α_{11}, και λαμβάνω το «συμπληρωματικό» του $\overline{\alpha_{11}}$

Πάω στο δεύτερο στοιχείο, βλέπω το α_{22} και σχηματίζω το $\overline{\alpha_{22}}$

Πάω στο τρίτο στοιχείο, βλέπω το α_{33} και σχηματίζω το $\overline{\alpha_{33}}$

Πάω στο τέταρτο στοιχείο, βλέπω το α_{44} και σχηματίζω το $\overline{\alpha_{44}}$

……………………………………………………………………………………………………

Πάω στο ν-οστό στοιχείο, βλέπω το $\alpha_{\nu\nu}$ και σχηματίζω το $\overline{\alpha_{\nu\nu}}$

……………………………………………………………………………………………………

Σχηματίζω τον αριθμό :

$0,\overline{\alpha_{11}}\overline{\alpha_{22}}\overline{\alpha_{33}}\overline{\alpha_{44}}...\overline{\alpha_{\nu\nu}}....$

Ο παραπάνω αριθμός ανήκει εκ ορισμού στο C, διότι τα ψηφία του είναι 0 ή 1.

Ο παραπάνω αριθμός είναι διαφορετικός από όλους τους αριθμούς του πίνακα, διότι διαφέρει σε ένα τουλάχιστον ψηφίο από έκαστο εξ αυτών εκ κατασκευής.

Άτοπο![3]

Βρήκαμε ψηφίο που δεν έχει αντίστοιχο στο $\mathbb{N}$. Άρα το C δεν τίθεται σε 1-1 και επί αντιστοιχία με το $\mathbb{N}$, καθώς έχει παραπάνω στοιχεία.

Επί μέρους συμπέρασμα από το Σύνολο Cantor:

Είναι ένα γνήσιο υποσύνολο του [0,1], μηδενικού μήκους, που όμως έχει παραπάνω

στοιχεία από το $\mathrm{X}=\bigcup_{\iota=1}^{\infty}\mathbb{Q}_{\iota}$, έτσι όπως το έχουμε ορίσει.

- Το σύνολο $\mathbb{Q}$ είναι ένα σύνολο τοπολογικώς «πυκνό» . Αυτό μεταφράζεται στο ότι μεταξύ οιωνδήποτε δύο στοιχείων του, που είναι διαφορετικά και οσοδήποτε κοντά, υπάρχει ένα γνησίως ενδιάμεσο τρίτο. Για παράδειγμα: Μεταξύ του $\frac{11}{17}\ \kappa\alpha\iota\ \frac{12}{17}$ φαίνεται εκ πρώτης όψεως να μην χωρά ενδιαμέσως άλλο κλάσμα –ρητός . Όμως αν τα δούμε ως $\frac{110}{170}\ \kappa\alpha\iota\ \frac{120}{170}$ που και αυτά είναι ισοδύναμα (=ίσα) κλάσματα με τα αρχικά φαίνεται να χωράνε άλλα 9 ενδιάμεσα κλάσματα τα $\frac{110}{170}<\frac{111}{170}<\frac{112}{170}<...<\frac{119}{170}<\frac{120}{170}$ Και μεταξύ αυτών αν τα θεωρήσουμε ως Χ10 πολλαπλασιασμένα στους όρους τους χωράνε άλλα 9 κ.ο.κ. επ΄άπειρον, όσα θέλουμε. Τελικά, μεταξύ δύο ρητών, υπάρχουν άπειροι άλλοι ρητοί .
- Το σύνολο των δεκαδικών , που είναι μια ελάχιστη υποκλάση των Ρητών, είναι κι αυτό πυκνό. Δηλ. πρακτικά ανάμεσα στο 2,345 και στο 2,346 μπορούμε να παρεμβάλουμε όσους δεκαδικούς θέλουμε. Για παράδειγμα, αν τους δούμε ως 2,345000 και 2,346000 προσθέτοντας 3 μηδενικά στον καθένα όπως έχουμε μάθει ήδη από το Δημοτικό, τότε μπορούμε να προσθέσουμε άλλους 999 με αύξουσα σειρά, όπως φαίνεται εδώ: $2,345<\underbrace{2,345001<2,345002<2,345003<\ldots<2,345999}_{999\ \delta\varepsilon\kappa\alpha\delta\iota\kappa o\acute{\iota}\ \varepsilon\nu\delta\iota\acute{\alpha}\mu\varepsilon\sigma o\iota}<2,346.$

  Για να δούμε καλύτερα την ελάχιστη κλάση των δεκαδικών ρητών, την οποία χρησιμοποιούμε καθημερινά με αποτέλεσμα να αναπτύσσουμε λανθασμένη ιδέα για το πλήθος τους και την σημασία τους. Δεκαδικοί λοιπόν, είναι μόνο οι ανήκοντες στην κλάση

  $\frac{\mathrm{A}}{2^{\nu_1}\cdot 5^{\nu_2}}$ (1) με το κλάσμα ανάγωγο και ν_1 και ν_2 στο $\mathbb{N}$ και μόνον αυτοί. Όλοι οι υπόλοιποι είναι η κλάση που δίνει μη περατούμενα πηλίκα διαιρέσεων. Πιο συγκεκριμένα:

[3] Στην βιβλιογραφία, συχνά η παραπάνω απόδειξη είναι καταχωρισμένη με την έκφραση «Διαγώνιο επιχείρημα του Cantor» και όχι με την πιο φυσιολογική έκφραση «απόδειξη του Cantor» Αυτό έχει την εξήγησή του, καθώς αμφισβητήθηκε η ίδια η απόδειξη από διάφορα μαθηματικά ρεύματα και Σχολές που αμφισβητούν το «αξίωμα της επιλογής» του οποίου κάνει άμεση βασική κύρια χρήση ο Cantor. Τι λέει το «αξίωμα της επιλογής;» Χωρίς φορμαλισμό, σε εξωμαθηματική διατύπωση, λέει ότι αν έχω άπειρους αριθμήσιμους αμμόλοφους όπου έχει άπειρους κόκκους άμμου ο κάθε ένας, τότε μπορώ να πάρω έναν κόκκο από κάθε έναν αμμόλοφο. (Αυτό έκανε ο Cantor) (Η δε φυσική εκλαϊκευτική προσομοίωση του αξιώματος ανήκει στην Καθηγήτρια του ΕΚΠΑ κα Βασιλική Φαρμάκη.)

$\dfrac{B}{2^{\nu_1}\cdot 3^{\nu_2}\cdot 5^{\nu_3}\cdot 7^{\nu_4}\cdot\ldots\cdot p^{\nu_\kappa}\cdot\ldots\cdot\ldots..}$ (2) με το κλάσμα ανάγωγο, p πρώτος τα ν_i στο $\mathbb{N}$, και από το ν_3 και μετά δεν μπορεί να είναι όλοι οι εκθέτες ταυτόχρονα μηδενικοί. Αν σκεφθούμε, ότι έκαστος ακέραιος αναλύεται κατά μοναδικό τρόπο σε γινόμενο πρώτων, φαίνεται προφανής η μηδενική πιθανότητα του να βρω περατούμενη διαίρεση διαιρώντας δύο τυχαίους φυσικούς. Το ότι καθημερινώς κάνουμε δεκάδες περατούμενες διαιρέσεις, οι οποίες περατώνονται (εκτός από την στρογγυλοποιήσεις στα μηχανάκια) από το ότι χρησιμοποιούμε για Ιστορικούς πολιτισμικούς και σίγουρα βιολογικούς λόγους το δεκαδικό σύστημα (έχουμε 10 δάκτυλα) ½ ¼ ¾ είναι ορισμένα καθημερινά κλάσματα δεκαδικά που ο κειμενογράφος γράφει σε σωστό μέγεθος με αυτόματη προσαρμογή.

Η Συμπαντική Ανθυφαίρεση, τα Συνεχή κλάσματα, ο Ευκλείδειος αλγόριθμος και το ρητόν ή άρρητον ενός πραγματικού αριθμού.

Ως *«συνεχές απλό κλάσμα»* ορίζεται μια παράσταση της παρακάτω μορφής, η οποία προκύπτει από τον κλασικό Ευκλείδειο αλγόριθμο.

$$\varphi = 1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cdots}}}}}$$

1ucasvb.tumblr.com

Έχω τον ρητό αριθμό $\dfrac{1345}{403}$

Εκτελώ Ευκλείδεια Διαίρεση και έχω:

$$\frac{1345}{403}=3+\frac{136}{403}$$

Συνεχίζω την διαίρεση κατά την παρακάτω έννοια:

$$\frac{1345}{403}=3+\frac{136}{403}=3+\cfrac{1}{\cfrac{403}{136}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{131}{136}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{136}{131}}}=$$

$$=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{5}{131}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\cfrac{131}{5}}}}=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{26+\cfrac{1}{5}}}}=\frac{1345}{403}$$

$$\pi = 3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{292+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}}}}$$

Τα πρώτα ψηφία από τα άπειρα, μη περιοδικά ψηφία του π

Λόγω του πολυπλόκου της τελικής παράστασης έχουμε συμφωνήσει να γράφουμε:

$$\frac{1345}{403}=[3;2,1,26]=\alpha\nu\theta\varphi[1345,403]$$

Αν εκτελέσω τον αναλυτικό λεπτομερή αλγόριθμο εύρεσης ΜΚΔ μεταξύ δύο αριθμών , έχω το σχήμα:

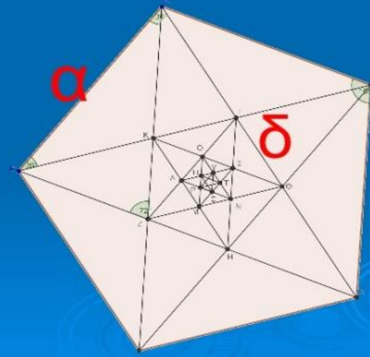
1345=**3**Χ403 +136

403= **2**Χ136+131

136= **1**Χ131+5

131= **26**Χ5+1

Από τις κόκκινες επισημάνσεις , φαίνεται η σχέση μεταξύ συνεχούς απλού κλάσματος, ανθυφαιρέσεως και Ευκλειδείου αλγορίθμου για την εύρεση ΜΚΔ δύο αριθμών.



Με τα άπειρα όμοια και όμοια ισοσκελή τρίγωνα που υπάρχουν στο σχήμα, συμβολίζοντας με δ διαγώνιο και α πλευρά, βλέπουμε ότι στο πρώτο μεγάλο πεντάγωνο, το α στο δ χωράει 1 φορά και περισσεύει δ1 <α. Το δ1 στο α, χωρά 1 φορά και περισσεύει α1<δ1. Φθάνουμε έτσι στο πρώτο εσωτερικό πεντάγωνο από τα άπειρα, όπου καλούμαστε να συνεχίσουμε την διαίρεση όπου διαιρέτης είναι πλέον η πλευρά του πρώτου εσωτερικού πενταγώνου και διαιρετέος η διαγώνιός του. (δ/α=δ1/α1 λόγω ομοιότητας) Συνεπώς είμαστε βέβαιοι, ότι το αποτέλεσμα με τις μονάδες για πηλίκο, θα συνεχίζεται περιοδικά επ΄ άπειρον.

Στην ανθυφαίρεση έχουμε τις εξής σημαντικότατες προτάσεις:

1) **Όλοι οι ρητοί αριθμοί, έχουν περατούμενη ανθυφαίρεση.**
2) **Όλοι οι άρρητοι αριθμοί έχουν άπειρη ανθυφαίρεση.**
   Ειδικά μάλιστα, οι τετραγωνικοί άρρητοι, δηλ. όλοι όσοι είναι ρίζες τριωνύμου με ακεραίους συντελεστές (κλάση από αλγεβρικούς)και μόνον αυτοί, **έχουν περιοδική ανθυφαίρεση.**
   Οι μη τετραγωνικοί άρρητοι έχουν μη περιοδική άπειρη ανθυφαίρεση.
3) Δύο ίδια ανθυφαιρετικά αναπτύγματα αντιστοιχούν στον ίδιο και μοναδικό ρητό. Αντιστρόφως, ένας ρητός εκφράζεται κατά δύο τρόπους α) για ακέραιο α, δύο τρόποι [α]=[α-1,1] β) Για μη ακέραιο, έχω $[\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_\nu,\alpha_{\nu+1}]=[\alpha_0,\alpha_1,\ldots\alpha_\nu,\alpha_{\nu+1}-1,1]$ Οπότε αν απαιτήσουμε τα τελευταία στοιχεία να μην είναι άσσοι, έχω μοναδικότητα αναπτύγματος οποιουδήποτε πραγματικού. Ας μην ξεχνάμε, ότι και η δεκαδική ανάπτυξη ενός ρητού, δεν είναι μοναδική Υπενθυμίζουμε λ.χ. το 0,999999999…….=1 όπως και 2,350000000000….=2,3499999999………
4) Κατά τα άλλα, αναλογικά ισχύουν ανισότητες του τύπου [1,2,3,4,5]>[1,2,3,3,17] κτλ όπως και με τους δεκαδικούς.
5) Στην άπειρη ανθυφαίρεση (δηλ. σε παραστάσεις αρρήτων) έχουμε μοναδικότητα του αναπτύγματος.

$$\frac{\delta}{\alpha}=\chi=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}\Leftrightarrow \chi-1=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}}\Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{\chi-1}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

$$\frac{1}{\chi-1}=\chi\Leftrightarrow \chi^2-\chi-1=0\Rightarrow \chi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\varphi\simeq 1{,}618033988749895\,,$$

ο *χρυσός λόγος, χρυσής Τομής.*

6) Χαρακτηρίζουμε την ανθυφαίρεση ως «Συμπαντική», διότι είναι μια παράσταση των αριθμών, ανεξάρτητη από τα συστήματα αρίθμησης. Οι άνθρωποι ανέπτυξαν το δεκαδικό σύστημα γιατί απλώς έχουν 10 δάκτυλα, το δυαδικό διότι εξυπηρετούσε τον σχεδιασμό λογικών κυκλωμάτων μέσω της Άλγεβρας Boole και οι τριδάκτυλοι Αριανοί όπως τους παριστάνει το Χόλυγουντ μάλλον θα έχουν το…εξαδικό! Ανεξαρτήτως λοιπόν αν κάποιος μαθηματικός είναι της Πλατωνικής Σχολής (=: Τα Μαθηματικά ανέκαθεν προϋπάρχουν στον κόσμο των ιδεών και απλώς τα ανακαλύπτουμε) είτε της Αριστοτελικής (=:Τα Μαθηματικά τα κατασκευάζουμε, εφευρίσκουμε) είναι σίγουρο, ότι η ανθυφαίρεση είναι υπεράνω και ανεξάρτητη από συνήθεις μαθηματικές παραδοχές των ανθρώπων. Πιθανόν , γι αυτό έδωσαν μεγάλη σημασία στην ανθυφαίρεση οι Αρχαίοι Έλληνες, όπου ακόμα και ο Πλάτων, μη Μαθηματικός ων, χρησιμοποιεί ανθυφαιρετικές σχέσεις στα κείμενά του και στην δομή του λόγου του, η οποία μπορεί και να περικλείει (και μάλλον περικλείει) κάποια κωδικοποίηση η οποία μπορεί να έχει και μη προφανή εμβάθυνση[4]

$$\sqrt{2}=1+\sqrt{2}-1=1+\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{1+\sqrt{2}}=$$
$$=1+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}=\sqrt{2}=1+\sqrt{2}-1=1+\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}=1+\vdots$$
$$=1+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2\cdots}}}.$$

Και ένα κλασικό παράδειγμα εισαγωγής αντιπαιδαγωγικής παρουσίασης αποτελέσματος, όπου αποκρύπτουμε ότι γνωρίζουμε την ανάλυση και φτιάχνουμε την σύνθεση παρουσιάζοντας μια «μαγική διαδικασία» που αναφέρεται σε «διάνοιες υψηλού επιπέδου», ώστε ο μαθητής να τρομοκρατείται σκοπίμως είτε με αμέλεια, περί τα Μαθηματικά. Το γράφουμε για το παρεμπίπτον μέρος του θέματος, πλην απολύτως ουσιαστικό για την επαγγελματική μας υπόσταση και ως λειτουργών. Δεν πρέπει επ΄ ουδενί να παρουσιάζονται τα μαθηματικά αποτελέσματα ως προϊόν «μαγείας» όπως κάνουν είτε οι πολύ καλοί ταχυδακτυλουργοί είτε οι κάκιστοι Μαθηματικοί.

Παραδείγματα:

[1,,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1…….]=φ= $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ =Ανθφ[$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$,1]

Ανθφ[$\sqrt{2}$,1]= [1,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,2,…….]= $\sqrt{2}$

[1,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2,1,2……]=[1, $\overline{1,2}$]= $\sqrt{3}$ =ανθφ[$\sqrt{3}$,1]

Επομένως ισχύει το σχήμα :

Πεπερασμένη ανθυφαίρεση =Ρητός

Άπειρη ανθυφαίρεση =Άρρητος

Στα παραπάνω, φαίνεται ακόμα και διαισθητικά το «απειροπλάσιον» των αρρήτων έναντι των ρητών

Με αυτή την θεώρηση, η πιθανότητα να επιλέξει κάποιος ρητό από τους πραγματικούς είναι ένα κλάσμα της μορφής .

---

[4] Ο μέγιστος Έλληνας καθηγητής του Απειροστικού Λογισμού, Ανάλυσης Πραγματικών Αριθμών κτλ ομότιμος πλέον του ΕΚΠΑ **κ. Στυλιανός Νεγρεπόντης** τα τελευταία χρόνια ασχολείται πέραν των πολλών άλλων και με την Ιστορία των Αρχαίων Ελληνικών Μαθηματικών, όπου έχει βρει σημαντικά αποτελέσματα γύρω από το όλον θέμα «Ανθυφαίρεση» στον Πλάτωνα και όχι μόνον, που δεν έχουν ακόμα δημοσιευθεί, αλλά μέρος τους αναδεικνύεται είτε από πρόχειρες σημειώσεις των Μεταπτυχιακών Φοιτητών του Μαθηματικού Τμήματος που τον έχουν παρακολουθήσει ή και τον έχουν ακούσει προφορικώς να αναπτύσσει (τύχη αγαθή κι ο συντάκτης του παρόντος) είτε και **πάρα πολύ καλών εργασιών**, ολοκληρωμένων, που έχουν εκπονήσει Μεταπτυχιακοί Φοιτητές, όπως λ.χ. ο **κ. Σωκράτης Ντριάνκος** εδώ

$$p = \frac{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \alpha\nu\theta\upsilon\varphi\alpha\iota\rho\acute{\varepsilon}\sigma\alpha\iota\omega\nu\ \mu\varepsilon\, 1\sigma\tau o\iota\chi\varepsilon\acute{\iota}o + \pi.\alpha\nu\theta\varphi.\mu\varepsilon\, 2\sigma.+\ldots}{\acute{O}\lambda\varepsilon\varsigma\ o\iota\ \alpha\nu\theta\upsilon\varphi\alpha\iota\rho\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma} =$$

$$\frac{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\{(\mathrm{A}\nu\theta\varphi[\nu_1] + \mathrm{A}\nu\theta\varphi[\nu_1,\nu_2] + \mathrm{A}\nu\theta\varphi[\nu_1,\nu_2,\nu_3] + \ldots.. + \mathrm{A}\nu\theta\varphi[\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\ldots\nu_\kappa])\}}{\Pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\{\mathrm{A}\nu\theta\varphi[\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_4,\ldots\ldots.]\}}$$

$$\frac{\aleph_0 + \aleph_0^{\ 2} + \aleph_0^{\ 3} + \aleph_0^{\ 4} + \ldots.\aleph_0^{\ \nu}}{\aleph^{\ \aleph}} = \frac{\dfrac{\aleph_0^{\ \nu+1} - 1}{\aleph_0 - 1}}{\aleph_0^{\ \aleph}} = \frac{\dfrac{\aleph_0^{\ \nu+1}}{\aleph}}{\aleph_0^{\ \aleph_0}} = \frac{\aleph_0^{\ \nu+1}}{\aleph_0 \cdot \aleph_0^{\ \aleph}} = \frac{\aleph_0^{\ \nu}}{\aleph_0^{\ \aleph_0}} \quad (1)$$

Το κλάσμα (1), έχει προκύψει με κάποιον γενικώς επιρρεπή σε λάθη λογισμό, αφού όταν κάνεις πράξεις με άπειρα μεγέθη, υπάρχουν παγίδες, στις οποίες έχουν ιστορικώς πέσει και πραγματικά μέγιστοι εκ των Μαθηματικών . Εδώ όμως γνωρίζουμε, ότι κάνει 0 . Η Μαθηματική επιστημονική προσέγγιση, γίνεται μόνο μέσω θεωρίας Μέτρου. Στην πραγματικότητα, ο αριθμητής, έχει το πλήθος των μονοσυνόλων του $\mathbb{N}$, συν το πλήθος των διατεταγμένων ζευγών του $\mathbb{N}$, συν το πλήθος των διατεταγμένων τριάδων του $\mathbb{N}$ κ.ο.κ. όμως, για πεπερασμένο πλήθος ν-άδων, ενώ οι τιμές που μπορεί να πάρει κάθε ν είναι στο πλήθος Άλεφ μηδέν ($\aleph_0$) Επίσης μπορεί να αποδειχθεί ότι και το $\mathbb{N}^2$ είναι αριθμήσιμο και επαγωγικά[5] και το $\mathbb{N}^\nu$ $\forall \nu \in \mathbb{N}$.

Άρα ο αριθμητικής του (1) έχει τελικά ισχύ $\aleph_0$.

Για τον παρονομαστή έχουμε $\aleph_0^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0} = \aleph_1 > \aleph_0$. Άρα το κλάσμα (1) ισούται με 0.

Τελικά συμπεράσματα:

Η τελική , **διαπίστωση** για το ότι όλοι τελικά οι αριθμοί είναι απειροψήφιοι **έχει καταστεί σαφής:**

Α) Οι Δεκαδικοί ρητοί που είναι οι μοναδικοί τερματιζόμενη στο δεκαδικό σύστημα είναι ελάχιστοι, ουσιαστικά «ανύπαρκτοι» μπροστά στο πλήθος των Ρητών . Αν διαλέξουμε ένα ρητό από τους ρητούς στην τύχη, η πιθανότητα να επιλέξουμε δεκαδικό είναι 0.

Β) Και οι τερματιζόμενοι γράφονται με απειροψήφια μορφή. Λ.χ. 2,34=2,339999…

Γ) Η πιθανότητα να επιλέξουμε ρητό από τους πραγματικούς είναι 0.

Δ) Οι Ρητοί έχουν άπειρο πλήθος $\aleph_0$ το άλεφ μηδέν, το άπειρο των αριθμήσιμων συνόλων. Οι πραγματικοί $\mathbb{R}$ έχουν πλήθος $\aleph_0$

Το γιατί όμως συμβαίνει αυτό, ως διαισθητική διαπίστωση, όχι ως απόδειξη, εδράζεται στα παρακάτω (που όμως παρουσιάζονται προηγουμένως)

- Το υπεραριθμήσιμο που αντιπροσωπεύει την ισχύ των Αρρήτων $\aleph_1$ (, είναι πολύ μεγαλύτερο από την ισχύ των Ρητών $\aleph_0$.
- Το υπεραριθμήσιμο είναι «πολύ μεγαλύτερο» από το αριθμήσιμο. ($\aleph_1 = 2^{\aleph_0} > \aleph_0$) Το εάν υπάρχει ενδιάμεση τάξη απείρου, δεν το ξέρουμε, ο Cantor, ισχυρίστηκε πως όχι, αυτό όμως είναι γνωστό ως « υπόθεση του συνεχούς»[6]
- Το υπεραριθμήσιμο έχει σχέση με το αριθμήσιμο όπως το πεπερασμένο με το άπειρο.
  Κι όπως με το πεπερασμένο δεν μπορούμε να περιγράψουμε το άπειρο (το ολοκληρωμένο, όχι το «δυνάμει») φαίνεται, πώς κατά τον ίδιο τρόπο αποτυγχάνει το αριθμήσιμο να περιγράψει το υπεραριθμήσιμο.

[5] Περιεκτικές σημειώσεις επί του θέματος, βρίσκουμε στην σύντομη εργασία του κ. Μιχάλη Κολουντζάκη εδώ

[6] Αξίζει τον κόπο ο αναγνώστης να διαβάσει το άρθρο του κ. Στάθη Λειβαδά στην ηλεκτρονική έκδοση του «Βήματος» εδώ

Δικτυογραφία του ιδίου επί σχετικών :

1) «Ορισμένες αποδείξεις ότι 0,99999…=1 και το γιατί του εκπλήσσοντος αποτελέσματος» ΕΔΩ
2) «Μαθηματικά αντικείμενα και σχέσεις στην Υπηρεσία του Φιλοσοφικού και Μεταφυσικού στοχασμού» ΕΔΩ
3) Εφαρμοζόμενα Μαθηματικά σε ένα φύλο χαρτί Α4 ΕΔΩ
4) Η ανθυφαίρεση πλευράς και διαγωνίου κανονικού πενταγώνου και γιατί ο Φ είναι άρρητος
5) τι είναι η ανθυφαίρεση, απλά και κατανοητά. Χειρόγραφες σημειώσεις.
6) Η άπειρη πολλαπλασιαστική ανθυφαιρετική διαδικασία της αρμονίας, στα σχόλια του Φιλολάου.
7) Ανθυφαίρεση των ριζών των αριθμών 3, 13 , 19 με την μονάδα

Βιβλιογραφία επί σχετικών:

1) Μια περιληπτική άποψη –γνώμη-θέση του κ. Στυλιανού Νεγρεπόντη για την επίδραση των Πυθαγορείων στην διαμόρφωση του Ελληνικού Πολιτισμού

2) **Αλίκη Μπασιάκου:** «Ο Πολιτικός του Πλάτωνος και η Παλινδρομική Περιοδικήτα της ανθυφαίρεσης των Τετραγωνικών Αρρήτων»

3) **†Βασιλική Κλεφτάκη :** «Ανάλυση του 10[ου] Βιβλίου του Ευκλείδη και τεκμηρίωση της περιοδικής παλινδρομικής ανθυφαίρεσης των τετραγωνικών αρρήτων»

4) Σωτήρης Συριόπουλος : Σχόλια επί άρθρου του D.B. Fowler «Ratio in Early Greek Mathematics» που δημοσιεύθηκε στο BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY Volume 1, Number 6, November 1979

5) Χαράλαμπου Σπυρίδη (ΕΚΠΑ) Η Πυθαγόρειος Ανθυφαίρεσις ή Ανταναίρεσις

Τάξη Α΄Λυκείου

Διδακτική Ενότητα: Διάταξη των πραγματικών αριθμών.

Σχολικό βιβλίο, Μαθηματικά α΄Λυκείου,

Στόχοι	**Θεματικές Ενότητες** **(διατιθέμενος χρόνος)**	**Ενδεικτικές δραστηριότητες**
Πρ5. Διερευνούν την έννοια της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Αναπαριστούν στον άξονα των πραγματικών αριθμών σύνολα που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις και τα συμβολίζουν χρησιμοποιώντας διαστήματα.	*(2ώρες)*	• Γιατί η τετραγωνική ρίζα του 2 είναι άρρητος; Προβληματίζονται σχετικά με τους τρόπους με τους οποίους αποδεικνύεται ότι ένας ισχυρισμός δεν ισχύει. 0,999999999999999………..=1 • Ανέκδοτο: Ένας τρελός βλέποντας κάποιον άλλον τρελό να βρει την άκρη από ένα κουβάρι, του λέει υποτιμητικά: -Μην ψάχνεις να βρεις την άκρη!... Την έχω κόψει! Το παραπάνω ανέκδοτο έχει εφαρμογή αν στο διάστημα [0,1] κόψουμε (αφαιρέσουμε το δεξί του άκρο , το 1 και πάρουμε το σύνολο [0,1) ; • Να βρείτε 9 ρητούς αριθμούς ανάμεσα στο 1,4 και 1,5 • Να βρείτε ακόμα 9 ρητούς αριθμούς ανάμεσα στο 1,43 και στο 1,44 • Περιγράψτε μια τεχνική που να μπορώ να βρω ανάμεσα στον 1,3 και στον 1,4 9^6 άλλους ρητούς δεκαδικούς • Ανάμεσα στον $\frac{5}{8}$ *και* $\frac{7}{8}$ βρείτε έναν ακόμη ρητό

		• Μπορείτε να βρείτε ρητό ανάμεσα σε $\frac{3}{7}$ *και* $\frac{4}{7}$;

Προϋπάρχουσες Γνώσεις και Ιδέες των Μαθητών:

- Ισοδύναμα κλάσματα. Πολλαπλασιάζουμε αριθμητή και παρονομαστή με τον ίδιο αριθμό και το κλάσμα διατηρείται ίσο με το αρχικό. Το αντίστροφο είναι η απλοποίηση.
- Όσες φορές κι αν κόψεις την άκρη από ένα κουβάρι, η άκρη θα παραμείνει «άκρη» .
- Το σχήμα 0,999999999999…..(επ΄άπειρον) είναι ένα σχήμα που παριστάνει έναν αριθμό που πλησιάζει οσοδήποτε κοντά στο 1, αλλά «ουδέποτε» γίνεται ίσο με 1 .

Τεχνική διάγνωσης:

- Ερωτήσεις και στο τέλος διήγηση του ανεκδότου!

- **Εννοιολογικές δυσκολίες:** Το άπειρο γενικώς είναι μια έννοια για την οποία η διαισθητική προσέγγιση δίνει λανθασμένα συμπεράσματα. Υπό την έννοια αυτή , έχει επιστημολογικά και γνωστικά εμπόδια μέγιστα, τα ίδια που αντιμετώπισαν και υπέλαμπρα μαθηματικά μυαλά όπως ο Φ. Γκάους που έκαναν λάθος με τις διαισθητικές τους προσεγγίσεις και την «κοινή λογική» Και αφού έκανε λάθος /η ο Γκάους, όλοι μπορούν να κάνουν, πόσο δε μάλλον οι μικροί μαθητές.! Ωστόσο, είναι προκλητική η προσπάθεια τιθάσευσης αυτή της έννοιας, παρ΄ όλες τις διδακτικές και επιστημολογικές της δυσκολίες.
- Διάκριση ρητών –αρρήτων , αφού και οι ρητοί δύναται να έχουν άπειρο πλήθος ψηφίων (περιοδικοί) μιας και η δεκαδική έκφραση των ρητών δεν είναι μονοσήμαντη αφού λ.χ. 2,35=2,3499999999999……
- Το πλήθος των τερματιζόμενων διαιρέσεων (:=δεκαδικοί τερματιζόμενοι) είναι μηδενικό (%) σε σχέση με τις μη τερματιζόμενες. Καλό είναι να θυμηθούν οι μαθητές, ότι οι τερματιζόμενες διαιρέσεις (ομιλούμε πάντα για ρητούς) είναι μόνο οι της μορφής :

$\frac{a}{2^{\mu}\cdot 5^{\nu}}$ **(1) (για ανάγωγο κλάσμα)**

Αυτό μπορεί να εξηγηθεί στην Α΄Λυκείου με συγκεκριμένα παραδείγματα, όπου η δύναμη του 2 είτε του 5 στον παρονομαστή, με χρήση ισοδυνάμων κλασμάτων, οδηγεί σε ίσο κλάσμα που έχει ως παρονομαστή δύναμη του 10, δηλ. το αποτέλεσμα της διαίρεσης είναι ο ακέραιος αριθμός α, στον οποίο έχουμε βάλλει υποδιαστολή σε πλήθος ψηφίων από τα δεξιά προς τα αριστερά όσο και η δύναμη του 10.

- Στην ζωή μας καθημερινά λοιπόν χρησιμοποιούμε ρητούς , όχι άρρητους που έχουν άπειρο πλήθος ψηφίων μη περιοδικό και άγνωστο σε όλους. Απ΄ αυτούς τους ρητούς, χρησιμοποιούμε μια ελάχιστη υποκλάση τους καθημερινά, τους δεκαδικούς τερματιζόμενους, μηδενικού ποσοστού % σε σχέση με τους ρητούς όλους.
- Πρακτικά η πιθανότητα να τερματίζεται μια τυχαία διαίρεση ακεραίου δια ακεραίου, είναι 0 , κάτι που προκύπτει από Ανώτερα μαθηματικά (Θεωρία Μέτρου πιθανότητες γεωμετρικές) που ωστόσο, μπορούν να αντιληφθούν οι μαθητές, αν δουν τον τύπο (1) και για το α έχουν την γνώση των δύο προτάσεων του Ευκλείδους ότι α) «Κάθε ακέραιος γράφεται κατά μονοσήμαντο τρόπο ως γινόμενο πρώτων» και β) οι πρώτοι αριθμοί είναι άπειροι στο πλήθος.
- Το $\sqrt{2}$ είναι μεν άρρητος (= μη εκφράσιμος , μη περιγράψιμος μη λεκτέος, ανείπωτος, άφατος, πλην μπορεί να κατασκευασθεί με κανόνα και διαβήτη και να τοποθετηθεί στον άξονα των πραγματικών.
- Το $\sqrt{2}$ λέγεται μεν ότι είναι άρρητος και ότι κανένας δεν μπορεί να ξέρει το πλήθος των ψηφίων του, όμως εμείς μπορούμε να τον πολλαπλασιάσουμε με τον εαυτό του και να βρούμε τον ακέραιο 2. Άρα είναι προσιτός, περιγράψιμος και διαχειρίσιμος.
- Η απόδειξη ότι δεν υπάρχει πιο μεγάλος πραγματικός (ή ρητός) κάτω από το 1 , είναι μεν απόδειξη με την εις άτοπον απαγωγή (δι΄ αντιπαραδείγματος) αλλά δεν πείθει την έντονη διαίσθησή μου, ότι αν από το [0,1] «κόψω» ,«αφαιρέσω» το 1 και πάρω το μαθηματικό αντικείμενο [0,1) δεν θα έχω δεξί άκρο. Μοιάζει με το ανέκδοτο με τον τρελό που προσπαθούσε να πείσει τους άλλους να μην ψάχνουν βρουν την άκρη του νήματος από το κουβάρι, διότι την έχει….κόψει!

Στόχοι:

Γνώσεις

- Κάθε ρητός δεκαδικός τερματιζόμενος, έχει και άλλη μία έκφραση με άπειρα εννιάρια
- Μετατροπή δεκαδικού περιοδικού σε ρητή έκφραση ως κλάσμα.
- Μεταξύ δύο ρητών υπάρχουν τελικά όσοι ρητοί θέλουμε, απεριόριστα, δηλ. άπειροι.
- Εφαρμογή της εις άτοπον απαγωγής δι αντιπαραδείγματος

Δεξιότητες

- Να μετατρέπουν οποιονδήποτε τερματιζόμενο δεκαδικό σε περιοδικό με περίοδο το 9
- Να μετατρέπουν δεκαδικό περιοδικό σε ρητή έκφραση κλάσματος

Στάσεις :

- Τα μαθηματικά δεν έχουν καμία σχέση με την λογιστική αλλά είναι κάτι πολύ παραπάνω ποιοτικά.
- Η γνώση της φύσης των αριθμών έχει βάθος και τα μαθηματικά εν τέλει είναι γοητευτικά.

Οριζόντιες ικανότητες

- Ανάπτυξη ικανότητας της αντίληψης αριθμού μέσω πολλαπλής αναπαράστασης (κλάσμα, δεκαδικός τερματιζόμενος , περιοδικός , άρρητος , άρρητος κατασκευαζόμενος

Θέματα /Δραστηριότητες	**Χρονική Διάρκεια**	**Εκπαιδευτικές Τεχνικές**	**Μέσα διδασκαλίας.**
Διάγνωση πρότερων γνώσεων και ιδεών	15΄	Ερωτήσεις-απαντήσεις	Πίνακας
Υπενθύμιση προαπαιτούμενων γνώσεων ✓ Ισοδύναμα κλάσματα ✓ 2,4=2,40=2,400= κ.ο.κ.	5΄	Ερωτήσεις-απαντήσεις	Πίνακας
Υποκίνηση ενδιαφέροντος για την διάταξη των ρητών και πραγματικών ✓ Διήγηση του ανεκδότου και σύντομη ψηφοφορία αν είναι δυνατόν να συμβαίνει αλλιώς	2΄	Ερώτηση για το εάν κάποιος διαφωνεί.	-
Άσκηση Ι: Βρείτε έναν αριθμό που βρίσκεται ανάμεσα στους: α) 2,34 και 2,36 β) $\frac{4}{11}$ *και* $\frac{6}{11}$ γ) 2,34 και 2,35 δ) $\frac{4}{11}$ *και* $\frac{5}{11}$	10΄	Εργασία σε ομάδες των 4 μαθητών (Ανά 2 θρανία)	Φύλλο εργασίας

ε) Πόσους ρητούς μπορούμε να βρούμε ανάμεσα σε δύο δεκαδικούς ή κλάσματα;			
Άσκηση ΙΙ : α)Αν α<β τότε $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$ β) Αν βάλουμε στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τους α και β , τι θέση θα έχει το $\frac{\alpha+\beta}{2}$; Άσκηση ΙΙΙ : Σχεδιάστε τον άξονα των πραγματικών και βάλτε τους αριθμούς -4,-3,-2,-1,0, +1, +2 , +3, +4 α) Πόσες μονάδες απέχει το 1 από το 2; Β) Πόσες μονάδες απέχει το 1 από το 3 ; Γ) Πόσες μονάδες απέχει το 0 από το 3; Δ) Το 3,5 από το 3; Ε) το 0,8 από το 0,3; Στ) -4 από το +4; Ζ) το -4 από το 0; Η) Το ¼ από το 1/5; Θ) το α από το β; Ι) Ισαπέχει το $\frac{\alpha+\beta}{2}$ από τα α και β;	13΄	Εργασία σε ομάδες των 4 μαθητών (Ανά 2 θρανία)	Φύλλο εργασίας
Επίλυση προβλήματος: Ένας βασιλιάς, βάζει το εξής πρόβλημα: «Χαρίζω όλο το Βασίλειό μου, σε	45΄	Επίλυση από όλη την τάξη που θα είναι χωρισμένη	(Πίνακας και φύλλο εργασίας) Κονστρουκτιβιστική προσέγγιση με διαπραγμάτευση των πιθανών

όποιον μπορέσει να μου δώσει την πιο μεγάλη αξία που είναι μικρότερη από 1€!» Ο Βασιλιάς δεν τρελάθηκε ξαφνικά για να χαρίσει το Βασίλειό του στον πρώτο που θα του επέλυε το πρόβλημα! Επομένως που βασίζεται;		σε ομάδες και η κάθε ομάδα θα δίνει επί μέρους απαντήσεις που θα διαπραγματεύονται μεταξύ τους και με την καθοδήγηση του διδάσκοντα.	απαντήσεων των μαθητών: • 99 λεπτά του Ευρώ. Συζήτηση για την απόρριψη. Δεν υπάρχει υποδιαίρεση μικρότερη από 1 λεπτό του ευρώ, όμως το πρόβλημα λέει για «αξία» Και αξία δεν έχουν μόνο τα λεπτά, έχουν και τα προϊόντα. Αν δεχθούμε ότι το ένα κιλό ζάχαρη κοστίζει 1€, τότε 999gr ζάχαρης κοστίζουν 0,999€ και ενώ δεν έχουμε υποδιαίρεση κάτω από 1 λεπτό, η αξία υπάρχει. • Και τότε όμως 1 κόκκος ζάχαρης που ζυγίζει πολύ λιγότερο από 1 gr, γίνει μεγαλύτερη αξία χωρίς

			να φθάνει το 1 Kgr. • Αν 1 κόκκος ζάχαρης ξεπερνά ή φθάνει το 1 kgr, έχουμε περιθώριο το ένα μόριο ζάχαρης. Ως γνωστόν, έχει χημικό τύπο $C_{11}H_{22}O_{11}$ και μοριακή μάζα 11X12 + 22X1 +11 X16 =330 Άρα τα 330 gr αποτελούνται από $6{,}023*10^{23}$ (=N)μόρια έκαστο των οποίων ζυγίζει 330gr/N (Αριθμός Avogadro) δηλ. $5{,}5*10^{-22}$ • Το 0,9999999….=1 • Αν α **<u>ο μέγιστος</u>** αριθμός πριν το 1, τότε α<1 και σύμφωνα με την άσκηση ΙΙα) θα ίσχυε $a < \frac{a+1}{2} < 1$

			άτοπο, γιατί ο α είναι ο μέγιστος πριν το 1 και βρήκαμε «πιο…μέγιστο!»

Δοκιμασία αξιολόγησης
Τάξη Α΄ Λυκείου. Χρόνος (15΄)
Διδακτικής ενότητα «Πυκνότητα ρητών και πραγματικών αριθμών»

Ονοματεπώνυμο:…………………………………………………………………………

Άσκηση 1

Γράψτε σε μια σειρά τους παρακάτω αριθμούς ξεκινώντας από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο:

4	-3	5	$\sqrt{2}$	1,41	0	1,42	2	0,9999…	

Άσκηση 2

Να παρεμβάλετε ανάμεσα στους 2,5 και 2,6 , εννέα άλλους δεκαδικούς.

Να παρεμβάλλετε 99 άλλους δεκαδικούς.

Άσκηση 3

Να παρεμβάλλετε ανάμεσα στα κλάσματα $\frac{7}{13}$ $και$ $\frac{8}{13}$ άλλα 99 κλάσματα.

Μπορεί αυτό να συνεχιστεί επ΄ άπειρον; Δώστε μια εξήγηση.

ΕΡΩΤΗΣΗ:

Γιατί η **<u>ένταση</u>** ως φυσικό μέγεθος *(ένταση ήχου, ένταση φωτός, ένταση ηλεκτρομαγνητικού σήματος κτλ)* πέφτει, **μειώνεται, ελαττώνεται, με το τετράγωνο της απόστασης από την πηγή;**

Απάντηση:

Οι τύποι της Φυσικής είναι γεμάτοι με παρονομαστές που έχουν κάποια απόσταση στο τετράγωνο. Πώς μπορεί να διδαχθεί αυτό, να εξηγηθεί να εμπεδωθεί σε μαθητές, όχι φοιτητές με τον καλύτερο τρόπο; <u>Και χωρίς προχωρημένα μαθηματικά που να περιέχουν ολοκληρώματα ;</u>

<u>Ξεκινάμε:</u>

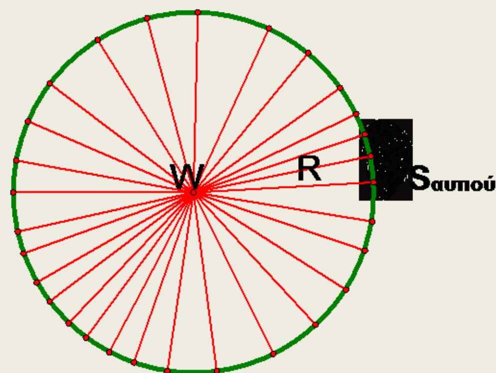
Η ένταση ενός μεγέθους είναι η ισχύς ανά επιφάνεια $I = \frac{W}{S}$ Λέει κάτι αυτό;

Χωρίς μοντέλο, χωρίς εικόνα <u>δεν λέει απολύτως τίποτα</u>. Ας επιχειρήσουμε να δούμε, γιατί οι Φυσικοί όρισαν ένα τέτοιο μέγεθος. Ας φανταστούμε μια σημειακή (ή και μη) πηγή ενέργειας, η οποία εκπέμπει ενέργεια στον χώρο. (Εννοούμε με ισοκατανομή σε όλο τον χώρο, ισομερώς για να μην πάμε σε πολύπλοκα μοντέλα) Πώς το φανταζόμαστε; Σαν ένα ήλιο που εκπέμπει ακτίνες προς όλες τις κατευθύνσεις του χώρου. ***Εκπέμπει ενέργεια στον χρόνο, κάποια ενέργεια ανά χρόνο, <u>εκπέμπεται ισχύς W</u> .*** Να φανταστούμε ότι **περιβάλουμε** την πηγή ισχύος με μια σφαίρα (όχι με οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια για να απλοποιηθεί το μοντέλο, χωρίς όμως να χάσει την αυστηρότητά του) Τότε **από κάθε κομμάτι της επιφάνειας της σφαίρας θα εκπέμπεται μια ποσότητα ενέργειας .** Αυτό το ποσό, δηλ. το πόση ενέργεια εκπέμπεται σε κάποιο χρόνο μέσα από την συγκεκριμένη επιφάνεια , συμφωνήσαν να το λένε **ένταση.**

Αν βγαίνει διπλάσια ισχύς από την ίδια επιφάνεια έχω διπλάσια ένταση , αν βγαίνει η ίδια ισχύς σε διπλάσια επιφάνεια έχω μίσασμα της έντασης. **Συμπίπτει περίπου <u>η ιδέα αυτή</u> ακόμα και με την γλωσσική ετυμολογία του όρου.** *(Η ένταση ως φυσικό μέγεθος είναι μια καίριας σημασίας μαθηματική ιδέα των Φυσικών<u>, δεν είναι του Θεού</u>, για να εξηγηθούν ευληπτότερα τα πράγματα)*

Στην διπλανή εικόνα βλέπουμε την σημειακή πηγή ενέργειας, την νοητή σφαίρα

και ένα αυτί εμβαδού $S_{αυτιού}$



Η ισχύς της πηγής είναι **σταθερή** ίση με W.

Από το αυτί, **προφανώς,** <u>διέρχεται</u> **κλάσμα της συνολικής εκπεμπομένης ισχύος** ίσο με

$\frac{S_{αυτιού}}{4\pi R^2}$ (ο παρονομαστής είναι το εμβαδόν της σφαίρας.)

Έχουμε δηλαδή ένταση που διέρχεται από το αυτί

$I = \frac{W'}{S_{αυτιού}} = \frac{\frac{S_{αυτιού}}{4\pi R^2}W}{S_{αυτιού}} = \frac{S_{αυτιού} \cdot W}{4\pi R^2 S_{αυτιού}} = \frac{W}{4\pi R^2}$ (Η ισχύς , έτσι όπως ορίστηκε, σε κάθε σημείο εξαρτάται από την απόσταση από την πηγή της Ενέργειας και –τελικά- όχι από το εμβαδόν όπως είναι ο πρωταρχικός τύπος της Εντάσεως)

Κατανοούμε, ότι όταν πάμε σε διπλάσια απόσταση 2R, τότε ο παρονομαστής θα τετραπλασιαστεί και θα έχω υποτετραπλασιασμό της ισχύος. **Αυτό όμως δεν είναι καλό μοντέλο κατανόησης.**

Κάνω την τελική απόπειρα:

Αν πάω σε διπλάσια ακτίνα, η σφαίρα θα έχει τετραπλάσιο εμβαδόν. ***Από το ΙΔΙΟ ΑΥΤΙ,*** θα διέρχεται υποτετραπλάσια ενέργεια στην μονάδα του χρόνου, αφού όση ενέργεια βγαίνει από την μικρή σφαίρα στην μονάδα του χρόνου, η ίδια ενέργεια βγαίνει και από την μεγάλη σφαίρα στην μονάδα του χρόνου.

Το πρακτικό πόρισμα είναι ότι **έστω και λίγο** να απομακρύνουμε το κινητό από το αυτί μας (στην πραγματικότητα από τον εγκέφαλό μας) έχουμε **μεγάλη μείωση** στην ενέργεια που διέρχεται από τον εγκέφαλό μας στην μονάδα του χρόνου. Αυτό θεωρείται ότι μικραίνει τον κίνδυνο, διότι μικραίνει η απορρόφηση ενέργειας από τον εγκέφαλο (που γίνεται –μέσω της αρχής υποβάθμισης της ενέργειας- θερμική, και ζεσταίνεται κυριολεκτικά το κεφάλι μας) Εννοείται, ότι για να γίνει θερμική, κάποια φωτόνια από τα εκπεμπόμενα έχουν συγκρουστεί με μόρια των κυττάρων μας στα οποία προκαλούν και αναπόφευκτες χημικές μεταβολές, άρα αλλοιώσεις, αυτό το ερευνούν οι Βιολόγοι)

Γιάννης Π. Πλατάρος

Μαθηματικός-Οικονομολόγος

ΜΠΕ Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών

Σεμινάριο εξαμηνιαίας διάρκειας μαθηματικών
Διοργάνωση: Τμήμα μαθηματικών Πανεπιστημίου Αθηνών

ΕΡΓΑΣΙΑ

Των: Βασιλείου Ξ. Κατωπόδη
Ιωάννη Π. Πλατάρου

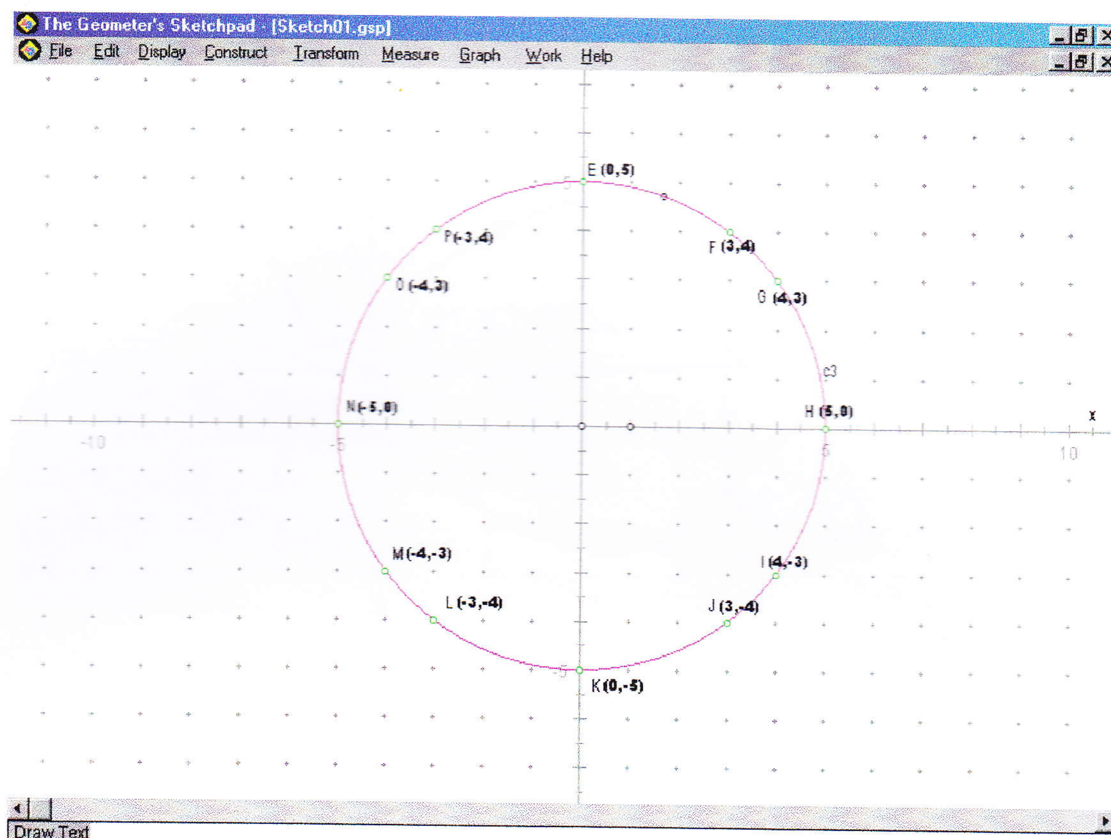
Παρουσίαση μαθήματος εισαγωγής στους
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
με διαδικασίες επίλυσης προβλήματος.

Επιβλέπων καθηγητής:
ΝΙΚΟΣ ΚΛΑΟΥΔΑΤΟΣ



ΑΘΗΝΑ
ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2000

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ



1. Στο πιο πάνω σχήμα, οι συντεταγμένες καθενός από τα σημειούμενα σημεία E,F,G,.....,P αλλά και οιουδήποτε τυχόντος άλλου T(χ,ψ) ικανοποιούν την εξίσωση :

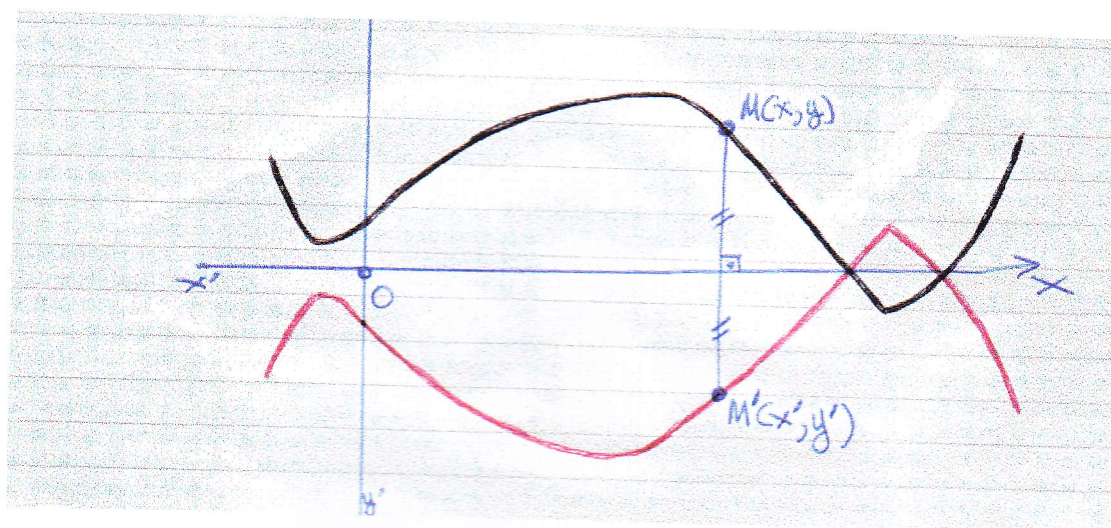
2. Για κάθε ένα από τα σημεία E,F,G,....P και T εφαρμόζω την εξής διαδικασία : "Διπλασιάζω την τετμημένη (:χ) αφήνοντας σταθερή την τεταγμένη (: ψ)
Να βρείτε πάνω στο σχήμα σας τα προκύπτοντα νέα σημεία E΄,F'G',.....P΄με την προηγούμενη διαδικασία και στη συνέχεια, να ενώσετε με ένα βέλος κάθε παλιό σημείο με το αντίστοιχο νέο.
Τι μεταβολή μπορούμε να πούμε ότι υπέστη ο κύκλος;

3. Ποιά αλγεβρική σχέση συνδέει τις καινούργιες συντεταγμένες χ΄, ψ΄, με τις παλιές χ, ψ,;

   χ΄=.........
   ψ΄=.........

   Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες σχέσεις, να βρείτε την εξίσωση με την οποία συνδέονται τα χ΄, ψ΄, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν την εξίσωση με την οποία συνδέονται τα χ,ψ. Ποίο είναι το <u>είδος</u> της καμπύλης που προέκυψε από τον εφαρμοσθέντα μετασχηματισμό;

ΒΑΣΙΚΟΙ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ



- Στο παραπάνω σχήμα φαίνεται η εφαρμογή του γνωστού μας μετασχηματισμού T: "κάθε σημείο του επιπέδου απεικονίζεται στο συμμετρικό του ως προς το άξονα χχ΄"

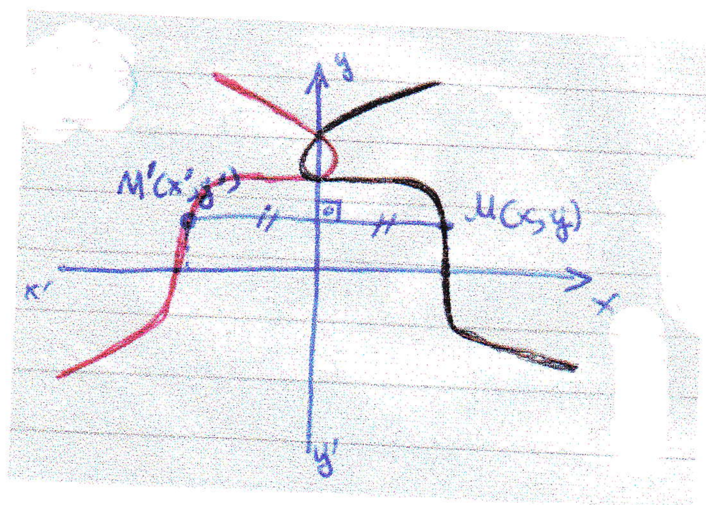
Α) Να γράψετε τις σχέσεις που συνδέουν τις καινούργιες συντεταγμένες χ΄, ψ΄με τις παλαιές χ,ψ.

Στη συνέχεια να τις γράψετε υπό μορφή συστήματος και να βρείτε τον <u>πίνακα του μετασχηματισμού.</u>

$x' =$ .... $\Leftrightarrow$ $\chi' =$ ....

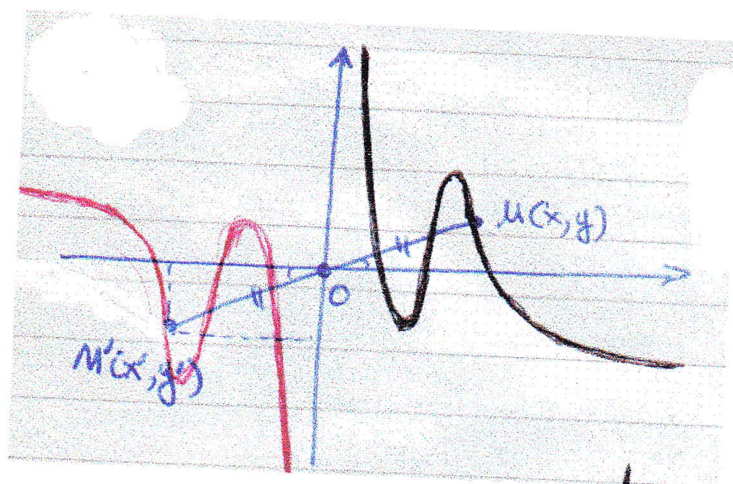
$\psi' =$ .... $\quad$ $\psi' =$ .... $\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \quad & \quad \\ \quad & \quad \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ \psi \end{bmatrix}$

Β) Με την ίδια διαδικασία, να βρείτε τους πίνακες των μετασχηματισμών:
Τ1: "Σε κάθε σημείο του επιπέδου απεικονίζεται το συμμετρικό του ως προς τον άξονα ψψ'.



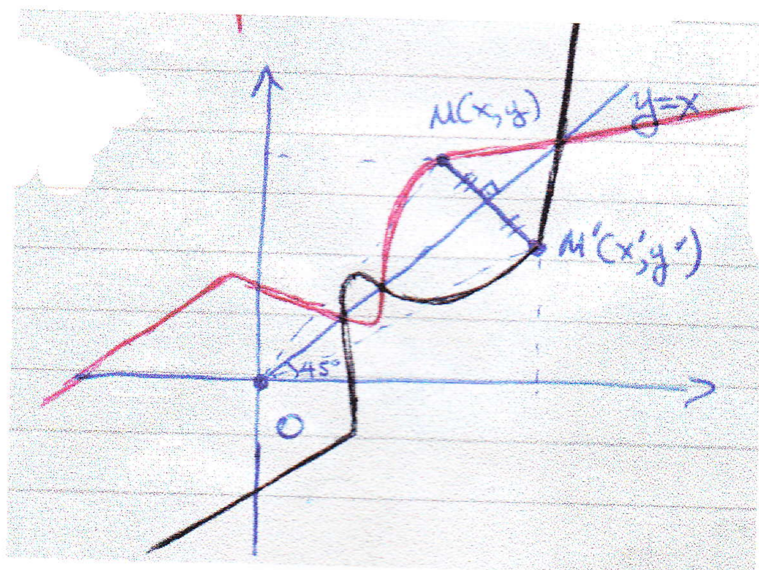
$\chi' = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\psi' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\Leftrightarrow$ $\chi' = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $\psi' = \ldots\ldots\ldots\ldots$ $\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} \chi' \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix}$

Τ2: "Σε κάθε σημείο του επιπέδου απεικονίζεται το συμμετρικό του ως προς την αρχή των αξόνων Ο(0,0)."



$x' = \ldots\ldots$, $\psi' = \ldots\ldots$ $\Leftrightarrow$ $\chi' = \ldots\ldots$, $\psi'' = \ldots\ldots$ $\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} \chi' \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix}$

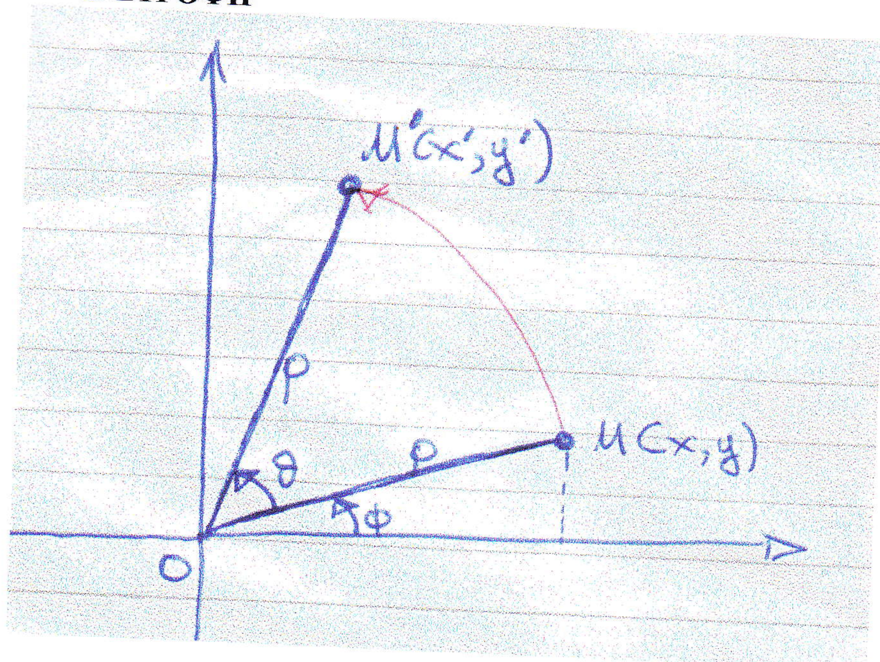
T3:"Σε κάθε σημείο του επιπέδου απεικονίζεται το συμμετρικό του ως προς την ευθεία ψ=χ (πρώτη διχοτόμο των αξόνων)"



$x' = \ldots\ldots\ldots$ $\Leftrightarrow$ $\chi' = \ldots\ldots\ldots$ $\Leftrightarrow$ $\begin{bmatrix} \chi' \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix}$

$\psi' = \ldots\ldots\ldots$ $\psi' = \ldots\ldots\ldots$

- **Η ΣΤΡΟΦΗ**



Στο παραπάνω σχήμα, το σχήμα, το σημείο Μ(χ,ψ) στρέφεται κατά γωνία θ, με κέντρο το Ο και ακτίνα ΟΜ=ρ.

Α) Να εκφρασθούν οι συντεταγμένες χ,ψ συναρτήσει των ρκαι φ.
Β) Να εκφρασθούν οι συντεταγμένες χ΄,ψ΄συναρτήσει των ρ και φ+θ.

Γ) Να εκφρασθούν οι χ΄,ψ΄συναρτήσει των χ,ψ, και θ.

Δ) Να βρεθεί ο πίνακας του μετασχηματισμού.

- Για τον τυχόντα γραμμικό μετασχηματισμό

$$T: \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε τις εικόνες των σημείων Α(1,0) και Β(0,1) των μοναδιαίων διανυσμάτων i και j .)

α) Εκ του αποτελέσματος, μπορείτε να διατυπώσετε έναν μνημονικό κανόνα για τους πίνακες χαρακτηριστικών μετασχηματισμών;

Β) Να εφαρμόσετε τον παραπάνω κανόνα για τον πίνακα της "στροφής".

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

(ΕΙΣΑΓΩΓΗ)

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ ΓΙΑ ΤΟΝ ΚΑΘΗΓΗΤΗ (1η διδακτική ώρα)

Α. Ο Καθηγητής διανέμει το φύλλο εργασίας (από ένα σε κάθε μαθητή) και ζητά να απαντήσουν οι μαθητές στο ερώτημα 1 το οποίο συνιστά υπενθύμιση γνωστού (κύκλος – εξίσωσή του).

Β. Αφού βεβαιωθεί ότι όλοι οι μαθητές έχουν απαντήσει (αναμενόμενος χρόνος απάντησης 2 λεπτά, γράφει στον πίνακα τις σωστές απαντήσεις και ζητά να προχωρήσει όλη η τάξη στην διαπραγμάτευση του 2. Στο τελευταίο υποερώτημα του 2 δέχεται όλες τις εξωμαθηματικές ορολογίες για απαντήσεις (π.χ. " τεντώθηκε", "τραβήχτηκε", "επιμηκήθηκε", "έγινε σαν αυγό", "παραμορφώθηκε", "έγινε έλλειψη") τις οποίες και γράφει στον πίνακα.

- Επισημαίνει ότι η τελευταία πιθανή απάντηση χρήζει αποδείξεως.
- Με την "μαιευτική μέθοδο" θέτει ερωτήσεις ώστε να αποσπασθεί ο ορισμός του μετασχηματισμού ως συνάρτηση.
  - Ο κύκλος είναι σύνολο;
  - Το νέο σχήμα είναι σύνολο;
  - Κατά την διαδικασία χάθηκε κάποιο σημείο;
  - Όλα τα αρχικά σημεία έχουν αντίστοιχο;
  - Ένα αρχικό σημείο πόσα αντίστοιχα έχει;
  - Πως είναι ήδη γνωστή η προηγούμενη διαδικασία;

Γράφει στον πίνακα τον ορισμό του γεωμετρικού μετασχηματισμού,που βρέθηκε με την βοήθεια των μαθητών.
Επιδεικνύει το παράδειγμα με το πλέγμα στο έδαφος. (Διαφάνεια 1)

Γ.

- Ζητά από τους μαθητές την διαπραγμάτευση της 3.
- Γράφει την τελική απάντηση στον πίνακα (έλλειψη) όπως και την εξίσωσή της.

Δείχνει το πώς η σχέση $\left\{\begin{matrix} x'=x \\ \psi'=2\psi \end{matrix}\right\}$ ισοδυναμεί με

$$\begin{matrix} x'=1.x+0.\psi \\ \psi'=0.\chi+2.\psi \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} \chi' \\ \psi' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix}$$

- Ορίζει τις έννοιες " γραμμικός μετασχηματισμός ", " πίνακας γραμμικού μετασχηματισμού" δείχνοντας την ισοδυναμία:

$$\begin{matrix} x'=ax+\beta\psi \\ \psi'=\gamma\chi+\delta\psi \end{matrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} x' \\ \psi' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} \chi \\ \psi \end{bmatrix}$$

- Δ. Ζητά την διαπραγμάτευση του $4^{ου}$ θέματος των βασικών γεωμετρικών μετασχηματισμών στο διανεμηθέν φυλλάδιο.

- Επιδεικνύει τους μετασχηματισμούς ενός τετραγώνου πλαισίου – πλέγματος μέσω της οπτικοποίησης που παρέχουν τα διανύσματα $\overrightarrow{AA'}$ όπου Α: αρχική θέση, και Α΄: τελική θέση σημείου.(Διαφάνειες 2 και 3)

Δηλαδή: Κάθε μαύρο πλέγμα έχει 25 σημεία τα οποία μέσω του διπλανού πίνακα της γραμμικής απεικόνισης πηγαίνουν σε μια νέα θέση. Από κάθε αρχικό και τελικό σημείο δημιουργούνται 25 διανύσματα τα οποία οπτικοποιούν το είδος της μεταβολής που δημιουργεί ο πίνακας στο επίπεδο .

ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΜΕ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ, ΣΤΗΝ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΕΩΣ.

Των Βασιλείου Ξ. Κατωπόδη –Ιωάννη Π. Πλατάρου.

1. Η ΘΕΩΡΙΑ ΚΑΤΑΣΚΕΥΗΣ ΓΝΩΣΗΣ (Κονστρουκτιβισμός)

Η νεώτερη θεωρία που αφορά τις μαθησιακές διαδικασίες και ειδικά το **πώς μαθαίνει κάποιος** Έχει να κάνει με **«χτίσιμο της γνώσης»** ή την **«κατασκευή της γνώσης».** Αυτή, δεν πραγματώνεται, ούτε με μεταφορά γνώσεων, ούτε με μεταφορά εμπειριών, αλλά κατακτάται **ενεργητικά** από τον υποκείμενο στη μάθηση. Επίσης η ίδια η γνώση καθ΄ εαυτή, δεν επιτελείται με την ανακάλυψη της απ΄ τον γνώστη ως προϋπάρχουσα, ανεξάρτητη απ΄ αυτόν. Η γνώση πλέον νοείται ως **διαδικασία προσαρμογής στον κόσμο των εμπειριών** κατά παράλληλο και αντίστοιχο τρόπο με την «κοινωνικοποίηση» η οποία νοείται ως η διαδικασία προσαρμογής του ατόμου στην κοινωνία.

Έτσι, όπως ακριβώς η Κοινωνιολογία νοεί την «κοινωνικοποίηση» ως μια ενεργητική διαδικασία ενός ατόμου, όμοια και ο **κονστρουκτιβισμός** εννοεί την γνώση ως **ενεργητικά αποκτούμενη, κατασκευαζόμενη,** και βέβαια ο μονόδρομος γι΄ αυτή τη διαδικασία είναι η κατασκευή της μάθησης μέσα από **διαδικασίες επίλυσης προβλημάτων**.

Αν δεχθούμε τις προηγούμενες αρχές, είναι φανερό ότι η έκφραση «κατανοώ την έννοια πχ. της απόλυτης τιμής» χάνει την **απόλυτη** σημασία της και το νόημά της προσδιορίζεται από **την ίδια την χρήση της έννοιας μέσα στην ίδια την τάξη, απ΄την ίδια την μαθητική κοινότητα, η οποία και την «νομιμοποιεί»** μέσω της χρήσης της και της ανταλλαγής απόψεων μεταξύ των μαθητών επ΄αυτής.

Η κονστρουκτιβιστική έρευνα, έχει επηρεάσει και την διδακτική πρακτική και την κατεύθυνση της μαθηματικής εκπαίδευσης, αφού μελετά τις **νοητικές παραστάσεις** πάνω στις οποίες χτίζονται οι **έννοιες** ή και τα **«νοητικά αντικείμενα»** που τις παριστούν, Επίσης μελετά **το πώς από αυτές τις έννοιες, με συνεχείς αφαιρέσεις, χτίζονται ανώτερες έννοιες, ανώτερης τάξης**, μια διαδικασία που περιγράφεται με τον όρο **αναστοχαστική αφαιρετική διαδικασία** (reflective abstraction).

Ως παράδειγμα επί των προηγουμένων, αναφέρουμε την έννοια «απόσταση» και την νοητική παράσταση της έννοιας αυτής, η οποία μπορεί να είναι π.χ. μια εικόνα ενός ευθυγράμμου τμήματος (απόσταση μεταξύ δύο σημείων) ή παράσταση - εικόνα ευθυγράμμου τμήματος καθέτου σε ευθεία (απόσταση σημείου από ευθεία). Ως νοητικά αντικείμενα της προηγούμενης έννοιας μπορεί να είναι τα σύμβολα $|\chi|$ (απόλυτη τιμή του χ= απόσταση του αριθμού χ από το Ο) $|\alpha-\beta|$ (: απόσταση των αριθμών α,β) ή $d(\chi,\psi)$ (: γενίκευση της έννοιας απόσταση με χρήση των ιδιοτήτων της μετρικής) ή ακόμα σύνδεση της έννοιας με την έννοια της νόρμας(:$d(\chi,\psi) = ||\chi-\psi||$) ή ακόμα σύνδεση και μετεξέλιξη της έννοιας «απόσταση» – «νόρμα» –«εσωτερικό γινόμενο» «τετραγωνική μορφή» μέσω των ταυτοτήτων (: νοητικά αντικείμενα)

$d(\chi,\psi) = ||\chi-\psi||$, $\quad ||\chi|| = \sqrt{T(x)}$, $\quad T(\chi)=E(\chi,\chi)$

όπου η έννοια «απόσταση» έχει έννοια ακόμη και για χώρους όπου δεν υπάρχει εποπτεία (πχ R^{n} , n>3) ούτε είναι δυνατόν να υπάρξει επαρκές εποπτικό μοντέλο. (π.χ. αποστάσεις στην Υπερβολική Γεωμετρία).

2. Η ΕΝΕΡΓΗΤΙΚΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ

Γενικά **η ενεργητική διδασκαλία** εστιάζεται στις παρακάτω ενέργειες του καθηγητή όπου η κάθε μία **προϋποθέτει παραδοχή αναλόγων αντιλήψεων** : Έτσι:

Α) Η διδασκαλία εκκινεί με ασυνήθη προβλήματα, χωρίς να έχουν διδαχθεί πριν οι απαραίτητες έννοιες και οι αλγόριθμοι.

- Αυτό σημαίνει, ότι οι μαθητές **μπορούν να λύσουν προβλήματα, ας μην γνωρίζουν τα συνήθως θεωρούμενα εκ των προτέρων «απαραίτητα».**

Β)Το διδακτικό υλικό και η διδασκαλία, προσαρμόζονται με το περιβάλλον της τάξεως τις γνώσεις του καθηγητή και τα ενδιαφέροντα των μαθητών.

- Αυτό σημαίνει ότι τα Μαθηματικά πρέπει να διδάσκονται σε **γνώριμα πλαίσια** των μαθητών και να λαμβάνουν υπ΄ οψιν τους την **γλώσσα** τους, τα **πολιτισμικά τους στοιχεία και την καθημερινότητά τους.**

Γ) Η διδασκαλία γίνεται με πολλαπλές επιλογές εκ μέρους του καθηγητή (εξατομικευμένη διδασκαλία , εργασία σε ομάδες, συζήτηση με όλη την τάξη).

- Αυτό σημαίνει ότι **οι ατομικές διαφορές στη μάθηση απαιτούν διαφορετική οργάνωση της τάξης.**

Δ) Η τάξη γίνεται «μαθηματική κοινότητα» και ο δάσκαλος των μαθηματικών χτίζει και αξιολογεί πάνω στις μεθόδους και λύσεις των μαθητών.

- Αυτό σημαίνει ότι **οι εικασίες που αναπτύσσονται, προωθούν και ελέγχουν την μάθηση**, ο δε δάσκαλος είναι κάθε στιγμή **δεκτικός στις προτάσεις των μαθητών.**

Ε) Η διδασκαλία γίνεται με εστίαση και τονισμό των κεντρικών μαθηματικών εννοιών.

- Αυτό σημαίνει ότι τυποποιημένοι αλγόριθμοι και απομονωμένες περιοχές των μαθηματικών δεν προσφέρονται για παρουσίαση των σημαντικών ιδεών. Αντιθέτως, η **ολιστική αντίληψη** και αντιμετώπιση των μαθηματικών είναι **κεντρική επιλογή της διδασκαλίας**.

Στ) Η χρήση άτυπων μορφών αξιολόγησης, επιδρά στις διδακτικές επιλογές.

- Αυτό σημαίνει **ότι η άμεση παρατήρηση του τρόπου δράσης και σκέψης των μαθητών την στιγμή που εργάζονται** δίνει όλες τις ευκαιρίες **ανάδρασης** στον καθηγητή για την **βελτίωση ή και αλλαγή του τρόπου οργάνωσης της διδασκαλίας.**

Ζ) Οι μαθητές πρέπει να ενθαρρύνονται σε αναστοχασμό πάνω στις δραστηριότητες και στη μάθηση.

- Αυτό σημαίνει ότι ο **αναστοχασμός είναι απαραίτητο εργαλείο για να γίνει αναθεώρηση, καλλίτερη κατανόηση και διασύνδεση των μαθηματικών εννοιών.**

3. ΤΟ ΓΕΝΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΣΤΙΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΤΟΥ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΥ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ.

Η εισαγωγή του κεφαλαίου των γεωμετρικών μετασχηματισμών με διαδικασίες επίλυσης προβλήματος, αλλά και κάθε μαθήματος μαθηματικών γίνεται έτσι ώστε :

Ο ΜΑΘΗΤΗΣ:

- Καλείται **να διαβάσει το πρόβλημα** , να κάνει **διευκρινιστικές ερωτήσεις , να σχεδιάσει** και να **αποτυπώσει** τις πληροφορίες που θα του παρασχεθούν μέσω του προβλήματος.
- Καλείται να εργασθεί μόνος ή καλύτερα καθ'ομάδας .
- Καλείται να **συζητήσει** την λύση του , να εικάσει, να προσπαθήσει να γενικεύσει ή και να **αναλύσει την πορεία** που έχει ακολουθήσει μέχρι την λύση .

- **Να ενθαρρυνθεί σε συμμετοχή στο μάθημα**, μέσα από την **«κατασκευή της γνώσης»** ακόμα και όταν δεν έχει πλήρη ή επαρκή μαθηματική υποδομή. Ήδη παρατηρείται το φαινόμενο της αξιοσημείωτης συμμετοχής «αδύνατων» μαθητών σε διαδικασίες επίλυσης προβλήματος, οι οποίοι – είναι βέβαιον – θα αδιαφορούσαν εάν το μάθημα είχε εισαχθεί με το παραδοσιακό μοντέλο διδασκαλίας (π.χ δασκαλοκεντρική διδασκαλία). Εξάλλου η

εισαγωγή βασίζεται αυστηρά σε **προϋπάρχουσες** γνώσεις και **η νέα γνώση κτίζεται αποκλειστικά πάνω στις παλιές.**

- **Να ενθαρρυνθεί στην δεξιότητα επίλυσης προβλημάτων**, αφού ο με ιλιγγιώδεις ρυθμούς αναπτυσσόμενος κόσμος μας, απαιτεί **διαρκή προσαρμογή του** κάθε προσώπου μέσα από διαδικασίες επίλυσης προβλήματος στο ευρύτερο και στενότερο εργασιακό του περιβάλλον. Η **δια βίου εκπαίδευση** είναι κάτι που οι παρούσες κοινωνικές αντιλήψεις θεωρούν πλέον ως φυσιολογικό, πρέπον, ευκταίο και επιδιωκόμενο απ΄όλους, ενώ ήδη στις αρχές μόλις της δεκαετίας του ΄80 η φράση «δια βίου εκπαίδευση» ηχούσε ως υπερβολή των διαφόρων φιλοσόφων – μελλοντολόγων της εκπαίδευσης.

- **Να ενθαρρυνθεί σε ομαδική εργασία,** κάτι που μπορεί να γίνει π.χ. με το τέχνασμα της διανομής ενός φύλλου εργασίας ανά δύο μαθητές. Είναι προφανές ότι αυτό συμβάλλει στην κοινωνικοποίηση του κάθε προσώπου και επίσης δρα ως αντίρροπος παράγοντες στην γενική τάση του Έλληνος να δρα κατά μόνας, αφού η εσωστρέφεια και ο εγωκεντρισμός μπορούν να χαρακτηρισθούν ως «εθνικά ελαττώματα».Παράλληλα η νέα γνώση ενσωματώνεται επίσημα **ως γνώση της μαθητικής κοινότητας**.

<u>Ο ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ :</u>

Επωμίζεται με την ευθύνη της **προσεκτικής σχεδίασης καταστάσεων δράσης, διατύπωσης, επικοινωνίας επικύρωσης ,απόφασης και εν τέλει θεσμοποίησης της νέας γνώσης.** Σ' αυτό το σχεδιασμό του θα πρέπει να λάβει πρόνοια να μην περιπέσει σε σχήμα κατά το οποίο η νέα γνώση προκύπτει «φυσιολογικά» και «αναμενόμενα» ή παράγεται μέσω τεχνασμάτων .

- Δεν είναι «μεταφορέας γνώσης», δεν παίζει – επιδεικνύει το «σόλο» του ενώπιον των μαθητών του, αλλά διευθύνει με την μπαγκέτα του, το προς κατάκτηση γνωστικό αντικείμενο.
- **Παρουσιάζει** το πρόβλημα στην τάξη , απαντά σε **διασαφητικές ερωτήσεις κατανόησης**
- και οργανώνει τους μαθητές .
- **Ενθαρρύνει επιβραβεύει πατοτρύνει και καθοδηγεί διακριτικά** τους μαθητές, ομιλεί στον ελάχιστο δυνατό βαθμό και **εκμαιεύει** τις νέες έννοιες.
- Ενθαρρύνει την συζήτηση **όλων των ιδεών** που αναπτύσσονται μεταξύ των μαθητών .
- Ενεργοποιεί τα γνωστικά σχήματα των μαθητών μέσω γενικών ή ειδικών ευρετικών, ώστε να μπορούν να αναγνωρίζουν πρότυπα ή μοντέλα να **διατυπώνουν εικασίες, να τις αξιολογούν**, να είναι σε θέση να **καταστρώνουν ένα σχέδιο** και να το εκτελούν.
- Προκαλεί τροποποίηση υπάρχοντος γενικού σχεδίου του μαθητή ή τον βοηθάει να δημιουργήσει νέο.

- Καλείται να αντιμετωπίσει τα γνωστικά ή επιστημολογικά εμπόδια που ίσως παρουσιασθούν στην τάξη από τους μαθητές.
- Να υποστηρίξει κάθε προσπάθεια **γενίκευσης του προβλήματος** .

- Καλείται να προβάλλει στους μαθητές του την ιδέα ότι τα μαθηματικά είναι μια <u>ανθρώπινη καθημερινή κοινωνική δραστηριότητα η οποία εκφράζεται με κάποια συμβολική γλώσσα, ενώ είναι ένα οικοδόμημα με εσωτερική συνέπεια λογικά δομημένο και κοινωνικά αποδεκτό.</u>

- Να παρουσιάσει την μαθηματική γνώση εν τω γενάσθαι και εν τω γίγνεσθαι στους μαθητές, και όχι φιλτραρισμένη συνθετοποιημένη προεπεξεργασμένη, προταξινομημένη, όπου μέσα

από τέτοια παρουσία (ορισμός – θεώρημα -απόδειξη) **να χάνεται η διαδικασία δημιουργίας τους** και η εφαρμογή τους.

- Να εθίσει τους μαθητές **σε ενεργητικές μεθόδους διδασκαλίας** κόντρα στο παραδοσιακό πρότυπο, το οποίο να επιτρέπει ανάπτυξη φαινομένων παθητικότητας και ανίας στους θεατές-ακροατές μαθητές .

- Να μη δίνει το κύρος στη νέα γνώση ο ίδιος ο διδάσκων, αλλά η ίδια η γνώση να αποκτά **υπόσταση κύρος και ισχύ μέσα από την (καθοδηγούμενη) ανακάλυψή της** από την μαθητική κοινότητα.

4. *ΕΙΔΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΩΝ ΣΤΙΣ ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΕΣ ΕΙΣΑΓΩΓΗΣ ΣΤΟΥΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΟΥΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΥΣ ΜΕ ΕΠΙΛΥΣΗ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΟΣ*

Ο ΜΑΘΗΤΗΣ:

- Στην αρχή καλείται **να αναγνωρίσει** και **να ανακαλέσει** από την μνήμη του την εξίσωση κύκλου την οποία γνωρίζει από Β΄ Λυκείου.**Έτσι η νέα γνώση θα κτισθεί στα θεμέλια της παλαιάς.**

- Καλείται **στην αρχή να κάνει μόνος του** μία απλή γεωμετρική διαδικασία που θα τον **εισάγει** στην νέα έννοια.Η διαδικασία αυτή σταθμημένη έτσι ώστε να είναι δυνατή από το σύνολο των μαθητών.

- Καλείται να **ανακαλύψει** τη σχέση που συνδέει τις νέες συντεταγμένες που ο ίδιος προσδιόρισε, με τις παλιές.

- Ο μαθητής που τέλειωσε πρώτος ή όσοι τελείωσαν πρώτοι**, ενθαρρύνονται** να επιδεικνύουν την λύση τους σε αδύνατους μαθητές στο ίδιο, εμπρός ή πίσω θρανίο**, βοηθώντας τους**.

- Καλείται **ελεύθερα να εκφράσει εικασίες** για το τι είδους μεταβολή υπέστη ο κύκλος μέσω της εργασίας του και **να εικάσει το είδος του νέου σχήματος**.

- Καλείται **με την μαιευτική μέθοδο να ανακαλύψει τον ορισμό του γραμμικού μετασχηματισμού** ως «απεικόνιση» μια έννοια την οποία γνωρίζει από πριν περιορισμένα. Έτσι καλείται **να διευρύνει το αντίστοιχο γνωστικό σχήμα** σύμφωνα με το οποίο έχει καταχωρίσει την έννοια «απεικόνιση» και «συνάρτηση». Το ίδιο ισχύει για τις προϋπάρχουσες έννοιες «πίνακας», «πολ/σμός πινάκων» σε σχέση με την χρησιμότητά τους και το πεδίο εφαρμογών τους. Δηλ. ένας «γραμμικός μετασχηματισμός» παριστάνεται ισοδύναμα μέσω ενός «γραμμικού συστήματος» το οποίο με τη σειρά του ισοδυναμεί με μία ισότητα γινομένου πινάκων με κάποιο πίνακα.
  Ακόμα έχουμε σημαντική **διεύρυνση του γνωστικού σχήματος** «συνάρτηση –άρτια-περιττή αντίστροφη ,συμμετρία ως προς ευθεία και σημείο» σε σχέση με τους γραμμικούς μετασχηματισμούς μέσω της οπτικοποίησης με διανυσματική τεχνική που θα παρουσιαστεί στοτέλος.
  Με τον ανακαλυπτόμενο μνημονικό κανόνα διευκολύνεται στην **ανάκληση** όλων των πινάκων των γραμμικών μετασχηματισμών.

Ο ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ :

- Ομιλεί μόνο για να **διευθύνει το μάθημα** με φράσεις του τύπου: «διαπραγματευτείτε το 1° ερώτημα», «πόσοι τελειώσατε», «βοηθήστε τους διπλανούς σας», «βρήκατε όλοι αυτό» , «διαπραγματευτείτε το 2° ερώτημα» κ.τ.λ.

- **Επιβραβεύει λεκτικά ιδίως τους αδύνατους** που διαπραγματεύονται κάποιο ερώτημα. Η δυσκολία των ερωτήσεων και η κλιμάκωσή τους εγγυώνται, ότι οπωσδήποτε **στις πρώτες θα απαντήσουν όλοι οι μαθητές.** Όσον αφορά στην εύρεση του πίνακα των γνωστών γραμμικών μετασχηματισμών, αναμένεται ομαλή απόκριση απ΄ το σύνολο της κάθε τάξης. Αν υπάρξει δυσκολία, θα αφορά την εύρεση του πρώτου πίνακα του πρώτου στη σειρά γραφικού μετασχηματισμού.

- **Εκμαιεύει τον ορισμό του γεωμετρικού μετασχηματισμού**. Αμέσως μετά δείχνει την διαφάνεια με το πλέγμα και την παραμόρφωσή του μετά τους σεισμούς , καθιστώντας έτσι τον ορισμό **άμεσα εφαρμόσιμο στην ζωή μας σε ένα από τα πραγματικά προβλήματα του κόσμου μας.**

- Στην διδασκαλία τους της 2ης ενότητας (στροφή) ίσως μπορεί **να ενεργοποιήσει μια ειδική ευρετική στους μαθητές για** τα Α) και Β) ερωτήματα λέγοντας «θυμηθείτε τριγωνομετρικό κύκλο ή ανάλυση δυνάμεως σε δύο συνιστώσες) για όσους μαθητές δεν το έχουν βρει .

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1.ΚΛΑΟΥΔΑΤΟΣ ΝΙΚΟΣ:(1996)ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΟΣ «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ»

2. POLYA GYORGY: (1991) «ΠΩΣ ΝΑ ΤΟ ΛΥΣΩ» ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΚΑΡΔΑΜΗΤΣΑ ΑΘΗΝΑ.

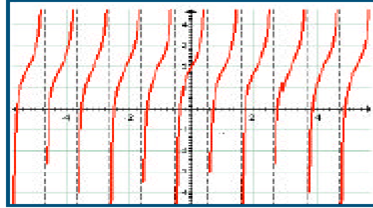
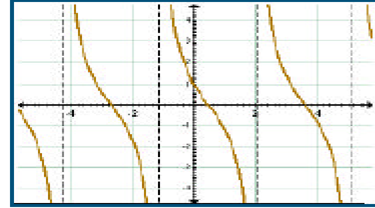
3.J .M .HEALY : «ΜΥΑΛΑ ΠΟΥ ΚΙΝΔΥΝΕΥΟΥΝ» ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΛΥΧΝΟΣ

4 . ΚΛΑΟΥΔΑΤΟΣ ΝΙΚΟΣ : (1997) ΕΙΣΗΓΗΣΗ ΣΕΜΙΝΑΡΙΟΥ «ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΜΑ-ΘΗΜΑΤΙΚΩΝ».

5. ΜΙΧ. Ι . ΚΑΣΣΩΤΑΚΗ-ΓΕΩΡ. Σ ΦΛΟΥΡΗ «ΜΑΘΗΣΗ ΚΑΙ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ».

6.ΘΕΟΔ.Γ.ΕΞΑΡΧΑΚΟΥ(1988) «ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ» ΕΚΔΟΣΕΙΣ ΕΛΛΗΝΙΚΑ ΓΡΑΜΜΑΤΑ

Function Probe

ΚΑΤΑΣΚΕΥΗ ΑΝΑΛΥΤΙΚΗΣ ΕΚΦΡΑΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΕ ΙΑΤΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

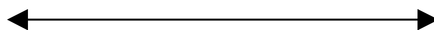
Εργασία στο εκπαιδευτικό λογισμικό Function Probe

<u>Περίληψη:</u> Δίνεται στους μαθητές η διαπραγμάτευση ενός προβλήματος στο οποίο δίδονται ορισμένα ζεύγη σημείων (εδώ σε πινακοποιημένη μορφή) με συγκεκριμένο φυσικό νόημα, τους ζητείται να τα παραστήσουν και να παρεμβάλουν την ευθεία που τα προσεγγίζει. Επίσης να κάνουν εκτίμηση ανεξάρτητης και εξαρτημένης μεταβλητής σε πρόβλημα που δεν είναι προφανές και προκαθορισμένο αυτό, διάφορες εικασίες , και προβλέψεις για να αντιμετωπίσουν ορισμένα άτοπα με τα οποία θα έλθουν σε επαφή, λόγω της ανεπάρκειας του γραμμικού προτύπου (μοντέλου) που θα χρησιμοποιήσουν.
Η τάξη για την οποία ενδείκνυται η δραστηριότητα είναι η Α’ λυκείου και η δραστηριότητα διαρκεί 1 διδακτική ώρα.

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

.....Λύκειο……….. *Τάξη Α'* *Τμήμα ………*

ημερομηνία:…………………..



Των

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΑ

1)………………………………………………………………

2)………………………………………………………………

Το πρόβλημα που δίνεται:

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας :

Πίνακας συστολικών πιέσεων -ηλικιών

Ηλικία (σε έτη)	**25**	**30**	**35**	**40**	**45**	**50**	**55**	**60**	**65**	**70**
Πίεση (σε mm Hg)	**116**	**117**	**121**	**130**	**135**	**142**	**147**	**151**	**155**	**174**

Ο πίνακας αυτός έχει προκύψει ως εξής: Πήραμε 10 ομάδες των 20 γυναικών ισοηλικιακές (20 εικοσιπεντάρες , 20 τριαντάρες 20 σαραντάρες κ.ο.κ.)μετρήσαμε την συστολική πίεση κάθε

μέλους κάθε ομάδας , βρήκαμε τον μέσο όρο σε κάθε ομάδα και τον γράψαμε στο αντίστοιχο τετραγωνίδιο.

α) Σύμφωνα με την παραπάνω πειραματική διαδικασία , ποια είναι η «ανεξάρτητη μεταβλητή» και ποια η «εξαρτημένη μεταβλητή;».

Για να αντιστραφούν οι μεταβλητές, δηλ. η εξαρτημένη να είναι ανεξάρτητη και η ανεξάρτητη εξαρτημένη, πώς θα έπρεπε κατά την άποψή σας να είχε σχεδιασθεί εξ αρχής το πείραμα των μετρήσεων;

Απάντηση:………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………
……………………………………………………………………

Β) Να κάνετε απεικόνιση των σημείων στο Fuction Probe , αφού προσαρμόσετε κατάλληλα την κλίμακα των αξόνων. Τι παρατηρείτε; Συνδέστε τα σημεία. Φαίνεται να υπάρχει ένας

φυσικός νόμος που να συσχετίζει την ηλικία των γυναικών με την τιμή της αρτηριακής τους πίεσης;

Απάντηση:…………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

Γ) να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης y=x και στην συνέχεια με χρήση του εργαλείου «αυξομείωση» να την προσαρμόσετε κατά τον καλύτερο δυνατό τρόπο που εσείς θα κρίνετε , στα δεδομένα σας.

Ποία είναι η εξίσωση της πιο προσαρμοσμένης ευθείας στα δεδομένα σας;

Απάντηση:

…………………………………………………………………….

Δ) Γιατί κατά την γνώμη σας δεν κατέληξαν όλοι οι μαθητές στην ίδια ακριβώς εξίσωση ευθείας;

Απάντηση:

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

…………………………………………………………………….

Ε) για την δεδομένη εξίσωση ευθείας , να βρείτε τις τιμές των πιέσεων που αντιστοιχούν για τις ηλικίες, 0 , 5 , 10 και 15.
Επίσης , για την παρατηρήσιμη υπαρκτή τιμή πιέσεως 210 , να βρεθεί η ηλικία στην οποία αντιστοιχεί.
Πώς σχολιάζετε αυτά τα αποτελέσματα;
Με ποιες προϋποθέσεις μπορούμε να πούμε ότι ισχύει το μοντέλο μας ;

Απάντηση:

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

……………………………………………………………………

ΤΑ ΓΝΩΣΤΙΚΑ ΕΜΠΟΔΙΑ ΠΟΥ ΑΝΑΦΕΡΟΝΤΑΙ ΣΤΟ ΣΥΓΚΕΚΡΙΜΕΝΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

1^{o}: Τα μαθηματικά δεν αναφέρονται σε πρακτικά προβλήματα.

Αναίρεση:

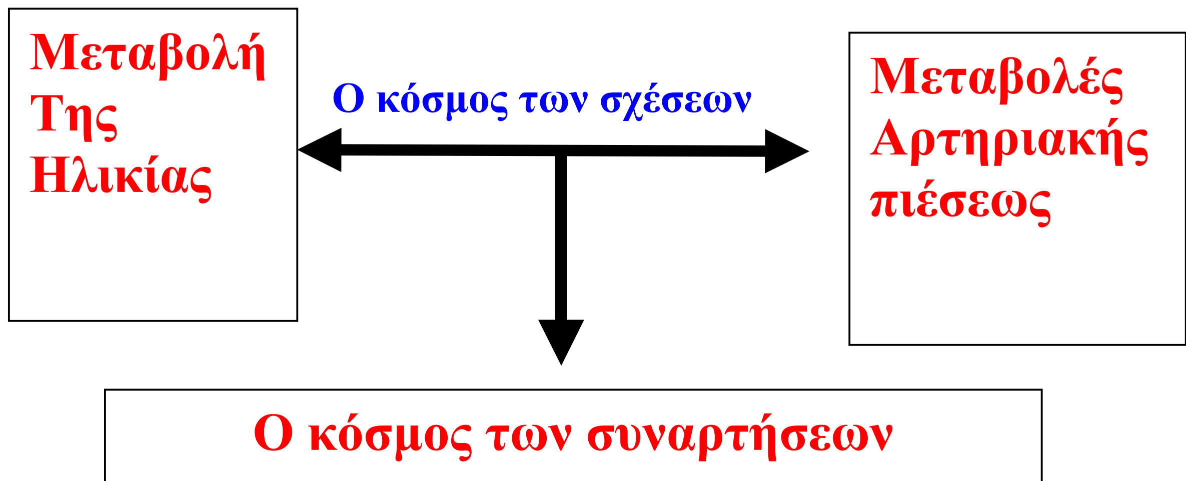
Με το προς διαπραγμάτευση πραγματικό πρόβλημα, ο μαθητής αναγνωρίζει ότι οι μεταβολές πιέσεως των αρτηριών που είναι ένα ιατρικό –βιολογικό φαινόμενο, μπορεί να έχει μαθηματικό ενδιαφέρον και να υπόκειται σε μαθηματική διαπραγμάτευση.

2^{o} : Οι Βιολογικοί ή Ιατρικοί νόμοι , δεν έχουν καμία σχέση με τα μαθηματικά .

Αναίρεση:

Η σύνδεση του νόμου μεταβολής της πίεσης των αρτηριών στον άνθρωπο με την έννοια της συνάρτησης με το πρότυπο που θα βρει αππο το Function Probe , τον κάνει να μεταβαίνει από τον αλγεβρικό τρόπο σκέψης, στον συναρτησιακό καθώς και να διακρίνει την εξαρτημένη από την ανεξάρτητη μεταβλητή .

Παραστατικότερα, έχω το παρακάτω σχήμα για την αναγνώριση που κάνει μέσω της επίλυσης αυτού του προβλήματος ο μαθητής:



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΘΗΓΗΤΗ

- ✓ Ο Διδάσκων , μοιράζει το φύλλο εργασίας των μαθητών , ένα ανά δύο μαθητές και ανά υπολογιστή .
- ✓ Ζητά την προσεκτική ανάγνωση του προβλήματος και την απάντηση στο πρώτο ερώτημα.

Το συγκεκριμένο ερώτημα αφορά την διάκριση μεταξύ ανεξάρτητης μεταβλητής και εξαρτημένης, καθώς αυτό είναι κάτι που μπορεί σε πραγματικά προβλήματα να συγχέεται.

Ένα διδακτικό εμπόδιο είναι η σύγχυση μεταξύ της «ανεξάρτητης» την οποία παρ' όλα ταύτα «ελέγχουμε» και της «εξαρτημένης» την οποία παρ' όλα ταύτα ….δεν ελέγχουμε!…

Αυτή η αντιθετικότητα της σημειολογίας των λέξεων , κατά την γνώμη του γράφοντος συνιστά ένα διδακτικό εμπόδιο το οποίο καλό είναι να διευκρινίζεται.

Την «*ανεξάρτητη*» την «*ελέγχουμε*» και την «*καθορίζουμε*» κατά το δοκούν μας εμείς εκ των προτέρων , αλλά την «*εξαρτημένη*» *δεν την καθορίζουμε* εμείς και την γνωρίζουμε πάντα εκ των υστέρων , ΜΕΤΑ την εκτέλεση του πειράματος……

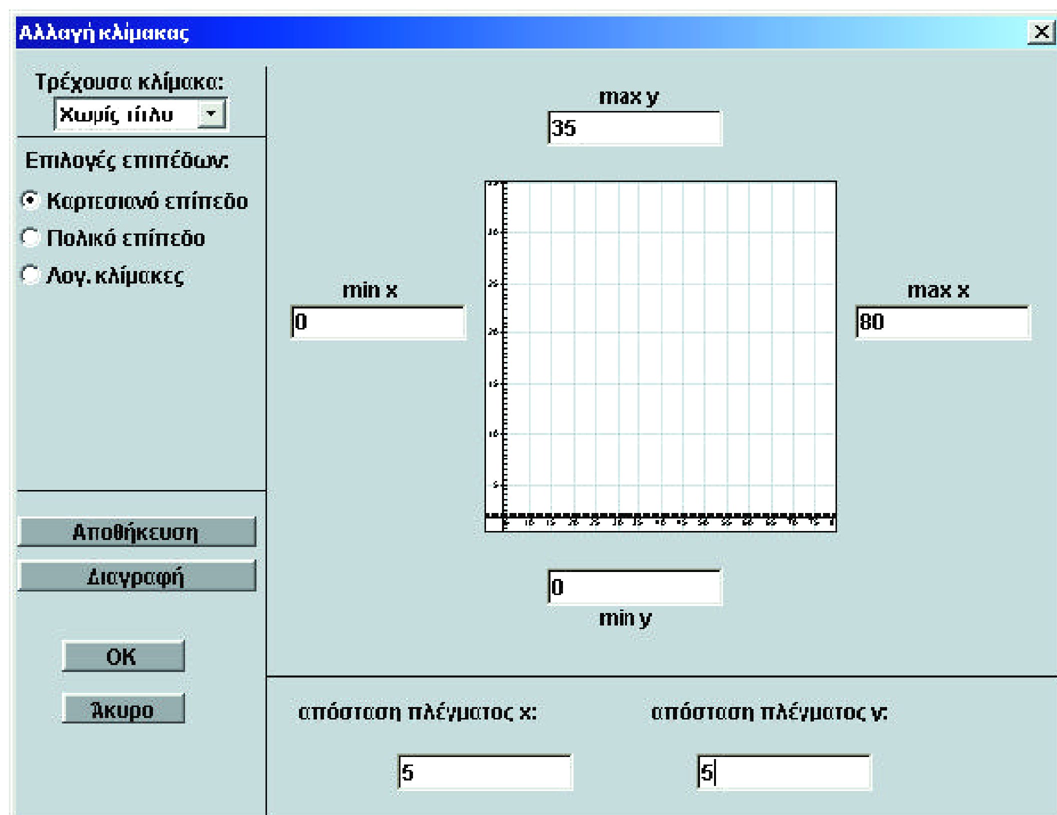
Ενδιαφέρον παρουσιάζει η νοητική κατασκευή του πειράματος κατά το οποίο αντιστρέφεται ο ρόλος των μεταβλητών.

Προσδοκώμενη απάντηση είναι αυτή , σύμφωνα με την οποία μετρώ πιέσεις γυναικών , επιλέγω ορισμένες τιμές και ΕΠΕΙΤΑ εξετάζω τον μέσο όρο των ηλικιών αυτών των γυναικών που παρουσιάζουν την ίδια πίεση.

Οι μαθητές λοιπόν, πρέπει να κατανοήσουν , ότι κάτω από ορισμένες συνθήκες που έχουν σχέση με επανασχεδιασμό ενός πειράματος μετρήσεων ο ρόλος των μεταβλητών μπορεί να αντιστραφεί. Ο καθηγητής μπορεί

να ζητήσει να του πουν την αντιστροφή των μεταβλητών σε ένα άλλο παρεμφερές πείραμα, όπου επιλέγω ηλικίες ανδρών και μετρώ το ύψος τους . Προφανώς η απάντηση είναι ότι επιλέγω ύψη ανδρών και προσπαθώ να τα συσχετίσω με την ηλικία των φορέων τους.

✓ Στο β) ερώτημα οι μαθητές αναμένεται να επιλέξουν την κατάλληλη προσαρμογή των αξόνων , καθώς για να εμφανιστούν απροσκόπτως οι τιμές μας , θα πρέπει να γίνει προσαρμογή τις προεπιλεγμένες τιμές σε κατάλληλες .



Εικόνα 1:Για παράδειγμα , εδώ η ελάχιστη τιμή για το χ μπορεί να καθοριστεί το 25 , ανώτατη το 100 . Για το y κατώτατη το 100 και ανώτατη το 200 . Απόσταση πλέγματος και για το χ και για το y το 20 , και επιλογή παράστασης στο καρτεσιανό επίπεδο.

Μεταβλητές

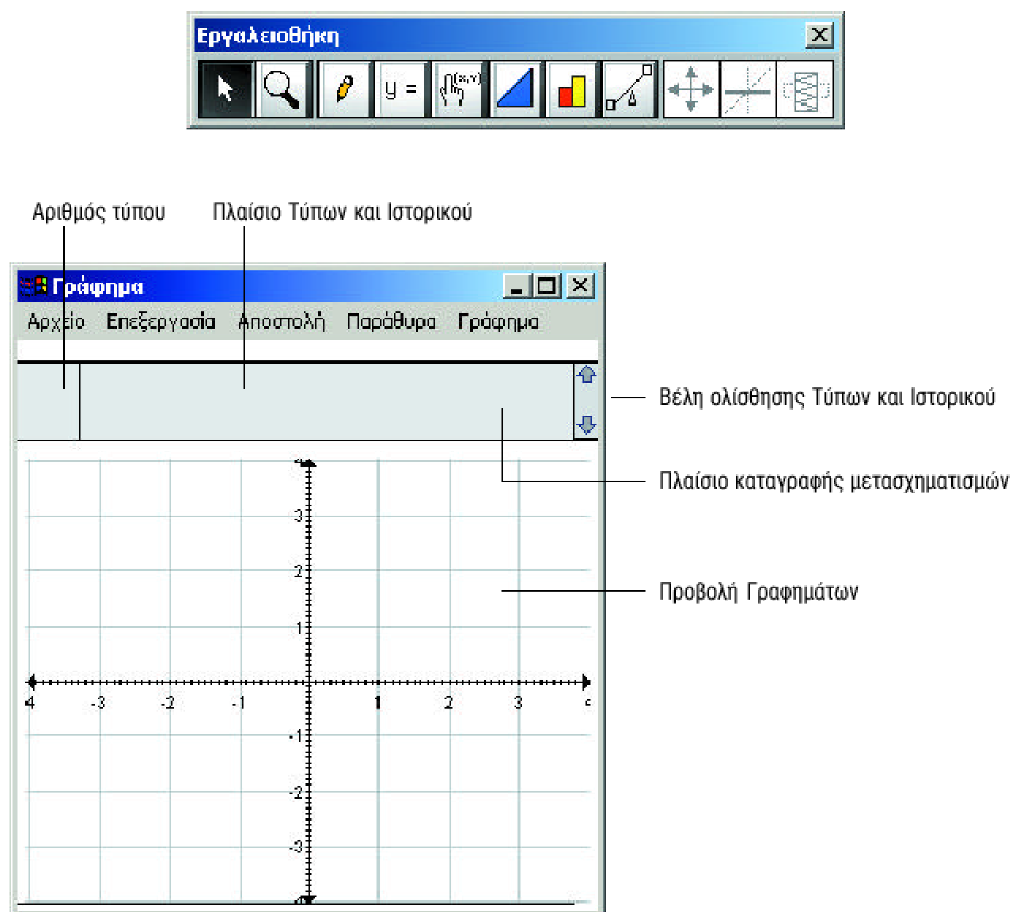
Όνομα Τιμή
Μονάδα ευρώ
Μεταβλητή m

Τιμή (ευρώ)
Διάμετρος (cm)

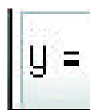
Αποθήκευση
Διαγραφή
Έγινε

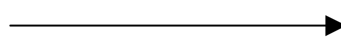
Όνομα Διάμετρος
Μονάδα cm
Μεταβλητή d

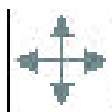
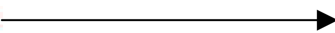
Εικόνα 2: Μπορεί να γίνει και επιλογή αξόνων , στον οριζόντιο «Ηλικία (σε έτη)» και στον κατακόρυφο «πίεση (σε mm Hg)»

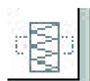
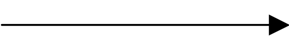


Εικόνα 3: Η περιοχή εμφάνισης της γραφικής παράστασης δίνει την δυνατότητα λειτουργίας των παρακάτω εργαλείων :



 Εργαλείο κατασκευής γρ. παράστασης


 Εργαλείο μετακίνησης της γραφικής παράστασης


 Εργαλείο ελέγχου μετακίνησης γραφ. παράστασης

- ✓ Στο τρίτο ερώτημα, η συνάρτηση y =x δεν θα φαίνεται καν στην περιοχή του διαγράμματος! (σκόπιμο λάθος!)

Αυτό θα επισημανθεί από τους μαθητές και αμέσως ο καθηγητής θα θέσει το ερώτημα ποια ελαφριά τροποποίηση θα πρέπει να γίνει στην y=x έτσι ώστε να περάσει από την περιοχή των σημείων μας.

Ως ευρετική ο καθηγητής μπορεί να επισημάνει ότι τα όρια των τιμών και ειδικά το κατώτατο όριο για την y , δίνει το 100 .

Άρα μια συνάρτηση του τύπου y=x+100 φέρνει την ευθεία στην περιοχή των σημείων.

Ο Καθηγητής μπορεί να ενθαρρύνει τους μαθητές να φτιάξει ο κάθε ένας την δική του προσέγγιση.

Δεν μπορεί να φτιαχτεί η ίδια από όλους αφού το ίδιο το πρόβλημα εύρεσης δεν είναι σαφώς καθορισμένο και ο κάθε ένας βρίσκει την δική του «με το μάτι» Αυτό φανερώνει κάπως πρώιμα την καθιέρωση κοινού αλγορίθμου που θα προσαρμόζει κάποια σημεία στην βέλτιστη καμπύλη , σύμφωνα με κάποιο κριτήριο (λ.χ. Κριτήριο των ελαχίστων τετραγώνων)

Σε σχέση με το ότι η ευθεία για ακραίες τιμές δίνει παράδοξα αποτελέσματα, οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο νόμος δεν είναι γραμμικός, ότι «περίπου» είναι γραμμικός , ότι «κατά τμήμα» είναι γραμμικός πράγμα που οδηγεί στην εικασία ότι μπορεί να είναι τμήμα καμπύλης «που μπορεί να νοιάζει με ευθεία» λόγω του ότι έχει μικρή «καμπυλότητα»

Τα προηγούμενα είναι μια καλή αφορμή για να συζητηθούν μέσα στην τάξη, μαζί με τους μαθητές , μεταξύ των ομάδων και του καθηγητή.

Μαθηματικά αντικείμενα και σχέσεις στην υπηρεσία του Φιλοσοφικού και Μεταφυσικού στοχασμού.

Γιάννης Πλατάρος, Μαθηματικός, Καπετάν Κρόμπα 37,

Τ.Κ. 242 00 ΜΕΣΣΗΝΗ , ηλ.ταχ. plataros@gmail.com

Περίληψη: Τα Μαθηματικά αντικείμενα και οι σχέσεις που τα διέπουν, βοηθούν σε κάποιες απαντήσεις φιλοσοφικού στοχασμού. Μαθηματικά προσομοιώματα, διευρύνουν τα όρια του πιθανού, του απίθανου, εφικτού ανέφικτου, δυνατού, αδύνατου. Τα Μαθηματικά, έχουν όρια στις απαντήσεις τους. Όμως, εξακολουθούν να αποτελούν ένα υπερ-εργαλείο για διαπραγμάτευση σε ερωτήματα από όλες τις Επιστήμες και ιδιαιτέρως από την Φιλοσοφία. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα φιλοσοφικού ενδιαφέροντος ερωτήματα που εμπεριέχουν το άπειρο, καθώς τα όποια πορίσματα που αναφέρονται σε αυτό και δεν είναι εύκολα παραδεκτά από την μάλλον πεπερασμένη ανθρώπινη φύση. Εκεί, έρχεται η Μαθηματική προσέγγιση στα ερωτήματα, για να αποτολμήσει κάποιες απαντήσεις, λιγότερο ή περισσότερο αποδεκτές.

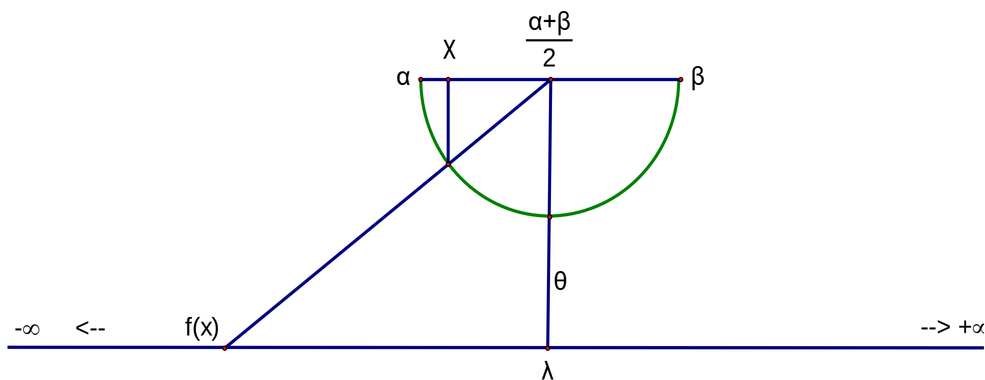
Εισαγωγή: Το που φθάνουν τα όρια των Μαθηματικών, εάν μπορούν να περιγράψουν την φύση, ποία η φύση των μαθηματικών αντικειμένων, είναι αντικείμενο ενασχόλησης της Φιλοσοφίας των Μαθηματικών, της Επιστημολογίας τους όπως και των Σχολών ρευμάτων και τάσεων των Μαθηματικών, όπως οι Πλατωνιστές, οι Αριστοτελικοί, οι Λογικιστές, οι Φορμαλιστές και οι Ιντουσιονιστές. Η κατάρρευση της θεμελίωσης της θεωρίας συνόλων από τον Φρέγκε (Frege), η επαναθεμέλιωσή τους σε άλλα (κατά Ζερμέλο-Φράνκελ [Zermelo-Fraenkel]) αξιώματα, η αποτυχημένη προσπάθεια του Χίλμπερτ (Hilbert) μέσω του φορμαλισμού να εξηγήσει όλα τα μαθηματικά, η διαψευσιμότητα και στα Μαθηματικά του Λάκατος (Lakatos), το σύνολο όλων των συνόλων, το παράδοξο του Ράσελ (Russel), τα θεωρήματα μη πληρότητας του Γκέντελ (Godel) , καταρρίπτουν το όραμα της εξήγησης των πάντων μέσω των Μαθηματικών. Ωστόσο, από την άλλη όχθη, υπάρχει η διαπίστωση του Φυσικού Νομπελίστα Ευγένιου Βίγκνερ (Eugene Wigner) για «την αδικαιολόγητη αποτελεσματικότητα

των Μαθηματικών στις Φυσικές Επιστήμες [1], [2] Σε κάθε περίπτωση κάποια μοντέλα ισχύουν αναλογικώς με τις όποιες παραδοχές που μπορεί να κάνει κάποιος και κάποια άλλα ισχύουν αμέσως. Παρουσιάζουμε παρακάτω συγκεκριμένες μαθηματικές επεξεργασίες για συγκεκριμένα ερωτήματα που εδρεύουν στον Φιλοσοφικό και Μεταφυσικό λογισμό του ανθρώπου. Η επιλογή τους έγινε με κριτήριο την ιστορικότητα, το ευρύτερο πέραν των Μαθηματικών ενδιαφέρον, το απρόσμενο των απαντήσεων, όπου υπάρχουν και κυρίως ως συμβολή στην ευρύτερη διδακτική οπτική τους ως απαραίτητο απτό υπερ-εργαλείο για τον φιλοσοφικό στοχασμό.

Ερώτημα 1: Αξίζει να πιστεύει κάποιος στον Θεό ή όχι; Στην *Θεωρία λήψης Αποφάσεων,* το γινόμενο $p_A Q_A$,όπου p_A είναι η πιθανότητα να συμβεί το ενδεχόμενο Α και Q_A το όφελος όταν συμβεί το ενδεχόμενο Α, ονομάζεται **«Αναμενόμενο Όφελος»** (Μαθηματική Ελπίδα) [3] αναλόγως ορίζεται και το **«Αναμενόμενο Κόστος».** Αν δεχθούμε ότι η πιθανότητα ύπαρξης Θεού είναι $p_\theta > 0$ (έστω και ελαχιστότατη) τότε το όφελος Q_θ από την υπόσχεση του Θεού προς τον άνθρωπο, είναι άπειρο. (Ατελεύτητος ζωή σε απόλυτη, διαρκή ευδαιμονία) και το αναμενόμενο όφελος από το γινόμενο $p_\theta Q_\theta$ είναι κι αυτό άπειρο, αφού πεπερασμένο επί άπειρο κάνει άπειρο. Σε αντιδιαστολή, το όποιο όφελος $Q_{-\theta}$ από την μη ύπαρξη Θεού, οσοδήποτε μεγάλο κι αν είναι , είναι πεπερασμένο σε μια πεπερασμένη ζωή και επομένως και το αναμενόμενο όποιο όφελος $(1-p_\theta)Q_{-\theta}$ από την μη ύπαρξη Θεού, είναι πεπερασμένο και σε σχέση με το άπειρο, είναι μηδέν. Επομένως τα Μαθηματικά υποδεικνύουν αποδοχή της ύπαρξης Θεού, μέσω απειρίας οφέλους. Αυτό πραγματικά δεν ισχύει για κάποιον που πιστεύει ότι $p_\theta = 0$. Στην παγκόσμια βιβλιογραφία αυτό το αποτέλεσμα είναι πιο γνωστό ως «Το στοίχημα του Πασκάλ» [13] και είναι αντικείμενο διαμάχης μεταξύ ένθεων και αθέων. Ενδεικτικό είναι, ότι η Google, στην ακριβή αναζήτηση φράσης "στοίχημα του Πασκάλ" δίνει 1.870 αποτελέσματα, μόνο στα Ελληνικά. (Σεπτέμβριος 2015)

Ερώτημα 2: Το άπειρο χωρά ολόκληρο στο πεπερασμένο; Η πρώτη γρήγορη διαισθητική απάντηση είναι «προφανώς όχι» όμως στα μαθηματικά έχουμε απεικονίσεις 1-1 και επί μεταξύ των συνόλων $(\alpha,\beta)\ \kappa\alpha\iota\ (-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$. Μια από τις άπειρες είναι η πασίγνωστη συνάρτηση $(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}) \to (-\infty,+\infty): f(x)=\varepsilon\varphi\chi$ και βέβαια άπειρες άλλες.

Μια ενδιαφέρουσα απεικόνιση 1-1 και επί ενός ανοικτού διαστήματος (α,β) σε μια ευθεία $(-\infty,+\infty)$ φαίνεται με μια γεωμετρική της αναπαράσταση στο

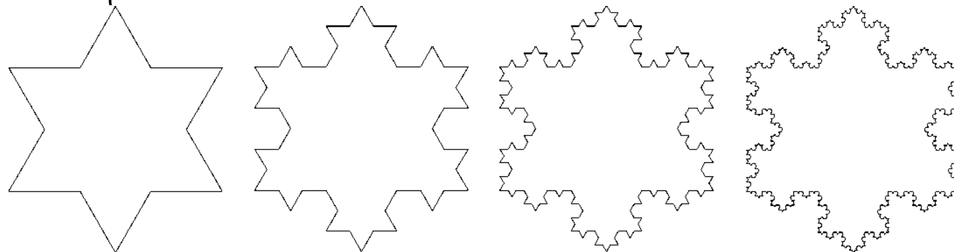


Σχήμα 1: Το χ κινείται ανάμεσα στο α και β. Είναι το ευθ. τμήμα αβ //(ε) Η προβολή του στο ημικύκλιο, ορίζει σημείο, το οποίο μια ακτίνα το προβάλει στην ευθεία (ε), με εκόνα του το f(x) . Με αυτή την απεικόνιση, καθώς το χ πλησιάζει το α, το f(x) απεικονίζεται οσοδήποτε μακριά. Όταν το χ ταυτιστεί με το α, έχω παραλληλία, όχι τομή, άρα όχι εικόνα, άρα έχω απεικόνιση ανοικτού διαστήματος. Ο αναγνώστης μπορεί να βρει και τον τύπο αυτής της απεικόνισης με όμοια τρίγωνα και λίγη αναλυτική Γεωμετρία και στην περίπτωση όπου η (ε) εφάπτεται στο ημικύκλιο να βρει την ειδική περίπτωση με την εφαπτομένη.

σχήμα 1:

Στην περίπτωση της απεικόνισης f^{-1}: $(-\infty,+\infty)\rightarrow(\alpha,\beta)$ με $f^{-1}(\chi)=\tau o\xi\varepsilon\varphi\chi$, υλοποιείται σε επίπεδο ανάλογης Μαθηματικής προσομοίωσης το μεταφυσικό *«Χαῖρε Θεοῦ ἀχωρήτου χώρα» (Γ΄στάσις, 15^{ος} οίκος Χαιρετισμών της Παναγίας)* Στην αντίστροφη απεικόνιση f : $(\alpha,\beta)\rightarrow(-\infty,+\infty)$ υλοποιείται το ανάλογο Μαθηματικό προσομοίωμα της Παλαιάς Διαθήκης *«ἐγώ εἶπα : ὑμεῖς θεοί ἐστέ καί υἱοί Ὑψίστου πάντες» (Ψαλμοί Δαυίδ Ψαλμός 81,1,5.)* το οποίο απόσπασμα χρησιμοποιεί ο ίδιος ο Ιησούς προς τους Φαρισαίους που τον κατηγορούν ότι ισχυρίζεται ότι είναι Θεός: *«ἀπεκρίθη αὐτοῖς ὁ Ἰησοῦς· οὐκ ἔστι γεγραμμένον ἐν τῷ νόμῳ ὑμῶν, ἐγὼ εἶπα, θεοί ἐστε; εἰ ἐκείνους εἶπε θεούς, πρὸς οὓς ὁ λόγος τοῦ Θεοῦ ἐγένετο, καὶ οὐ δύναται λυθῆναι ἡ γραφή» (Ιω. 10,34-35)* Συμπερασματικά, το άπειρο χωρά ολόκληρο στο πεπερασμένο, ενώ και το πεπερασμένο ουσιαστικά είναι εν δυνάμει άπειρο. Αυτό ισχύει στα Μαθηματικά. Δεύτερο συμπέρασμα, ότι «*Πιθανόν, αναλογικώς, να ισχύει και αλλού.*»

Ερώτημα 3. Υπάρχουν άπειρα αντικείμενα που είναι πεπερασμένα; Το πιο προσιτό, ως έννοια, «άπειρο –πεπερασμένο» είναι το ανοικτό σύνολο (α,β), το οποίο δεν έχει αρχή ούτε τέλος , όμως έχει μήκος πεπερασμένο, σύμφωνα με την κοινή μετρική 1. Δεν είναι δηλ. το μοντέλο της ευθείας που είναι ένα άπειρο μαθηματικό αντικείμενο, αλλά και το ανοικτό ευθύγραμμα τμήμα. Ο όρος «άπειρον» εννοεί το «μη έχον πέρας» και καλώς περιγράφει και τα ανοικτά σύνολα γενικώς. Φυσικά έχουμε και άλλα αντικείμενα με ενδιαφέρουσες μαθηματικές ιδιότητες, που είναι αρκετά πέραν της Φυσικής εμπειρίας παρ΄ότι όλα τα μαθηματικά αντικείμενα είναι ιδεατά προϊόντα γενίκευσης και αφαίρεσης. Έχουμε λοιπόν την νιφάδα του Κοχ (Koch) που έχει πεπερασμένο εμβαδόν, άπειρη περίμετρο, το μήκος της καμπύλης ανάμεσα σε οποιαδήποτε δύο σημεία της είναι άπειρο, έχει διάσταση



Σχήμα 2 Η νιφάδα του Koch σχηματίζεται από ένα αρχικό ισόπλευρο τρίγωνο, όπου σε κάθε πλευρά του αφαιρείται το μεσαίο 1/3 και προστίθενται άλλες δύο ισομήκεις πλευρές ισοπλεύρου και αυτό επ΄άπειρον.

ανάμεσα στο 1 και στο 2, είναι δηλαδή μορφοκλασματικό αντικείμενο.



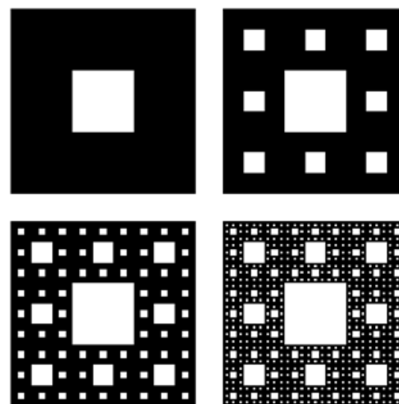
Σχήμα 3: Διαδοχικά βήματα κατασκευής τριγώνου Sierpinsky: Από το αρχικό μαύρο τρίγωνο «πετάμε» το κεντρικό 1/4, μένουν τρία άλλα μαύρα και συνεχίζουμε το ίδιο σε κάθε ένα που απομένει επ΄άπειρον

Το τρίγωνο του Ζαϊρπίνσκι (Sierpinski) όπου έχει εμβαδόν μηδέν, αλλά τα επί μέρους τρίγωνά του άπειρη περίμετρο. Το χαλί του Ζαϊρπίνσκι κι αυτό με μηδενικό εμβαδόν και άπειρη



Σχήμα 4 Η κατασκευή του Συνόλου του Κάντορ, ξεκινά από ένα ευθύγραμμο τμήμα -διάστημα. Το χωρίζουμε σε 3 ίσα τμήματα και αφαιρούμε το μεσαίο. στα δύο εναπομένοντα, εφαρμόζουμε τον ίδιο κανόνα κ.ο.κ. επ΄άπειρον.

περίμετρο και διάσταση ανάμεσα στο 1 και το 2. Επίσης και το σύνολο του Κάντορ (Cantor), με μηδενικό μήκος, διάσταση ανάμεσα σε 0 και 1 και υπεραριθμήσιμο πλήθος στοιχείων, δηλ. περισσότερα στοιχεία από το πλήθος των στοιχείων του $\mathbb{Q}$ και ίσα με το πλήθος των στοιχείων του $\mathbb{R}^{\kappa}$, όλα με ιδιότητες που μάλλον «μεταφυσικές» θα χαρακτήριζε κάποιος μη μαθηματικός. Συνύπαρξη απείρου με πεπερασμένο και διαστάσεις ανάμεσα στις ακέραιες.



Σχήμα 5: Και το χαλί του Ζαϊρπίνσκι ακολουθεί την ίδια κατασκευαστική λογική με το ομώνυμο τρίγωνό του. Από ένα μαύρο τετράγωνο που χωρίζεται σε 9 ίσα τετράγωνα, αφαιρούμε το μεσαίο 1/9. Στα

Βεβαίως, έχουμε και πιο καθημερινά μαθηματικά αντικείμενα όπως η γεωμετρική σειρά

$\sum_{\kappa=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\kappa}}=1$, η οποία παριστάνει άπειρο στο πλήθος άθροισμα πεπερασμένων θετικών αριθμών με πεπερασμένο αποτέλεσμα , το 1. Με αντίστροφη οπτική, το διάστημα [0, 1], μπορεί να τμηθεί σε άπειρα το πλήθος ευθύγραμμα τμήματα. Είναι ουσιαστικά η «κοινή απάντηση» στα πιο γνωστά παράδοξα του Ζήνωνα [5] όπου το άθροισμα άπειρων χρονικών διαστημάτων δίνει πεπερασμένο αποτέλεσμα και όχι άπειρο όπως υποβάλλει η κοινή διαίσθηση του ανθρώπου. Και βεβαίως σε διαισθητική αντίθεση με το αποτέλεσμα $\sum_{\kappa=10^{1.000.000.000}}^{\infty}\frac{1}{\kappa}=\infty$, όπου η έναρξη του κ, γίνεται από έναν αριθμό που δεν μπορεί κάποιος να διανοηθεί, δεδομένου ότι τα στοιχειώδη σωματίδια που χωράνε στο σύμπαν είναι της τάξης μόλις του 10^{80}.[6] Συμπερασματικά, όλα τα παραπάνω μαθηματικά αντικείμενα επεκτείνουν την φαντασία για όντα σε ενδιάμεσες των ακεραίων διαστάσεις κτλ. πέραν των διαστάσεων άνω του 3. Ιστορικά, Επιστημολογικά και Επιστημονικά, ουδείς μπορεί να αποκλείσει με βεβαιότητα και εκ των προτέρων την πιθανότητα να υπάρχουν κι όλας.

Ερώτημα 4: Εφ΄ όσον ο Θεός είναι παντοδύναμος, μπορεί να φτιάξει μια πέτρα που να μην μπορεί να την σηκώσει; Αυτό το ερώτημα δεν είναι φιλοσοφικού τύπου, αλλά μόνο λογικού. Η μαθηματική δομή του ερωτήματος είναι η εξής: Έχουμε την λογική πρόταση p :«Ο Θεός είναι παντοδύναμος», και την πρόταση q : «Ο Θεός μπορεί να κατασκευάσει πέτρα που να μην μπορεί να την σηκώσει» (από την οποία προκύπτει αμέσως $q \Rightarrow \overline{p}$) Τότε η πρόταση

$(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow \overline{p})$ συνιστά **αντίφαση**, όπως μπορεί να επαληθεύσει με έναν πίνακα αληθείας ο αναγνώστης ή εκτελώντας τις πράξεις με τους λογικούς τύπους: $(p \wedge q) \wedge (q \Rightarrow \overline{p}) \equiv (p \wedge q) \wedge \overline{(q \wedge p)} \equiv w \wedge \overline{w}$ $\quad αντίφαση.$ Επομένως το ερώτημα αντιστρατεύεται την Λογική Αρχή της «μη αντίφασης» Άρα, δεν γίνεται δεκτό καν ως ερώτημα. Το αξιοπερίεργο με αυτό το λίαν διαδεδομένο ερώτημα από πολλές δεκαετίες, είναι η σοβαρή ακόμα αντιμετώπισή του ως διερευνητέου ερωτήματος μεταξύ «ενθέων και αθέων» όπου εμφανίζεται ως ανοικτό ερώτημα ή απαντημένο λανθασμένα ή ως ερώτημα ψυχαγωγικού τύπου, όμως χωρίς εξήγηση. Ο αναγνώστης αν βάλλει στην Google τέσσερις λέξεις κλειδιά «Θεός, παντοδύναμος, πέτρα, σηκώσει» βρίσκει πάνω από 6.700 διαπραγματεύσεις του ερωτήματος (αναζήτηση στις 27/08/2015) κατά κανόνα λιγότερο ή περισσότερο μακριά από τον πυρήνα του ερωτήματος που αποδείξαμε ως αντιφατικό.

Ερώτημα 5: Είναι δυνατόν ένα εφικτό και απολύτως δυνατό ενδεχόμενο να έχει πιθανότητα πραγματοποίησης 0; Μια γρήγορη απάντηση είναι ότι «Ναι, είναι εφικτό ένα δυνατό ενδεχόμενο Α να έχει πιθανότητα P(A)=0 , εάν το ενδεχόμενο Α δεν συμπεριλαμβάνεται στο σύνολο των ενδεχομένων ενός συγκεκριμένου πειράματος τύχης» Για παράδειγμα δίνουμε το ενδεχόμενο Α: «Το ζάρι δείχνει 7» που είναι αδύνατο ενδεχόμενο σε ένα κανονικό ζάρι, αλλά όχι και αδύνατο πραγματικά, εάν φτιάξουμε ζάρι με μια του ένδειξη σε πλευρά το 7. Το ερώτημα γίνεται λίαν ενδιαφέρον και εκφεύγει του τετριμμένου, εάν το Α, περιλαμβάνεται στον δειγματικό χώρο του πειράματος τύχης. Και η απάντηση είναι «Ναι, είναι δυνατόν και σε αυτή την περίπτωση» Δίνουμε συγκεκριμένα παραδείγματα:

Α) Φανταζόμαστε έναν άπειρο σάκο, εντός του οποίου θέτουμε άπειρα αριθμήσιμα διακριτά αντίγραφα του συνόλου όλων των ρητών και των αλγεβρικών αρρήτων. $\mathbb{Q} \cup \mathrm{A}$. Λέγοντας «διακριτά αντίγραφα» ας φανταστούμε τα ίδια μεν στοιχεία, αλλά σε άλλη απόχρωση χρώματος, από άπειρες διακριτές αποχρώσεις, έτσι ώστε να διαφοροποιούνται τα στοιχεία (=να μην θεωρούνται ίδια) και ως προς την απόχρωση. Δηλ. Το σύνολο $\mathrm{X} = \bigcup_{\iota=1}^{\infty} (\mathbb{Q}_\iota \cup \mathrm{A}_\iota)$ Επίσης εισάγουμε εντός του ιδίου σάκου τους αρρήτους υπερβατικούς που υπάρχουν στο σύνολο B=(0, $10^{-1.000.000.000}$) που είναι ένα απειροελάχιστου μήκους διάστημα. Η πιθανότητα λοιπόν να εξαχθεί απ΄αυτή την κάλπη ρητός είτε άρρητος αλγεβρικός είναι σύμφωνα με την Θεωρία Μέτρου, $P(X) = \dfrac{\mu(\mathrm{X})}{\mu(υπερβατικοί\ στο\ \mathrm{B})} = \dfrac{o}{10^{-1.000.000.000}} = 0$ Το αποτέλεσμα είναι απόρροια των παρακάτω προτάσεων της Θεωρίας μέτρου: (i) «Το μέτρο κάθε απείρου, αλλά αριθμήσιμου συνόλου, είναι μηδέν» (ii)«Άπειρη αριθμήσιμη ένωση αριθμησίμων συνόλων, δίνει αριθμήσιμο σύνολο» και επίσης (iii) «Το μέτρο (εδώ μήκος) ενός διαστήματος δεν αλλάζει αν αφαιρέσουμε οποιοδήποτε

αριθμήσιμο σύνολο απ΄αυτό»(iv) Το σύνολο των ρητών σε ένωση με το σύνολο των αλγεβρικών $\mathbb{Q} \cup \mathrm{A}$ είναι αριθμήσιμο. Και ενώ λοιπόν είναι εφικτή η κατασκευή με κανόνα και διαβήτη οποιουδήποτε ρητού εντός λ.χ. του διαστήματος (0,1) ή και αλγεβρικού ρητού (λ.χ. του $\sqrt{2}$) η πιθανότητα τμήσης του σε ρητό με μια τυχαία ευθεία είναι 0, παρ΄ότι το ανθρώπινο πνεύμα δεν το δέχεται, έστω κι αν η απειρία του υπεραριθμήσιμου του συνεχούς αποδεικνύεται ότι είναι «απείρως μεγαλύτερη» από την απειρία του αριθμησίμου. ($2^{\aleph_0} > \aleph_0$) Την ίδια δυσκολία παρουσιάζει το ανθρώπινο πνεύμα στο να παραδεχθεί ότι το (0,1) δεν έχει άκρα. Ακόμα και όταν γνωρίζει την απόδειξη *:«Έστω ότι το (0,1) είχε ένα δεξί μέγιστο άκρο το α. Τότε α<1 και επίσης* $\alpha < \frac{\alpha+1}{2} < 1$*, άτοπο, διότι το θεωρήσαμε το α ως το μέγιστο συνόλου (0,1) πριν το 1. Άρα το (0,1) δεν έχει δεξί άκρο και ομοίως και αριστερό».* Η κοινή όμως λογική με τα συγκεκριμένα μοντέλα με τα οποία αντιλαμβανόμαστε τον κόσμο, άρα και τα μαθηματικά αντικείμενα, αμφιβάλλει ακόμα και προ της αποδείξεως! Πιστεύει ότι 0,999999…. δεν είναι ίσο με 1 παρ΄ ότι μπορούν να προσκομιστούν διάφορες αποδείξεις και «νοιώθει» ότι το 0,9999… είναι το δεξί άκρο του (0,1) που δεν κάνει 1. [10],[11] Την ίδια αδυναμία διαισθητικής κατανόησης έχουμε όταν περιοριστούμε μόνο στους ρητούς θετικούς αριθμούς και προσπαθήσουμε να φανταστούμε την πιθανότητα όπως από την διαίρεση δύο τυχαίων φυσικών να μην προκύπτει ρητός περιοδικός. Η κοινή μας εμπειρία έχει γνωστά κλάσματα καθημερινής χρήσης όπως ½ , ¾, 5/8 που δίνουν τους δεκαδικούς τερματιζόμενους. 0.5, 0.75 και 0.625 αντιστοίχως, Όμως η κλάση των δεκαδικών τερματιζόμενων περιγράφεται από το κλάσμα $\frac{\mathrm{A}}{2^{\mu} \cdot 5^{\nu}}$, με τα μ,ν φυσικούς και το κλάσμα ανάγωγο. Όταν εκτελεστεί η διαίρεση που υποδηλώνει και θεωρώντας χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι μ>ν, έχουμε στην ουσία τα άδηλα, μη ορατά βήματα στον αλγόριθμο της διαίρεσης: $\frac{\mathrm{A}}{2^{\mu} \cdot 5^{\nu}} = \frac{\mathrm{A} \cdot 5^{\mu-\nu}}{2^{\mu} \cdot 5^{\nu} \cdot 5^{\mu-\nu}} = \frac{\mathrm{A} \cdot 5^{\mu-\nu}}{2^{\mu} \cdot 5^{\mu}} = \frac{\mathrm{A} \cdot 5^{\mu-\nu}}{10^{\mu}}$,όπου απ΄ την αριθμητική δεκαδική έκφραση του ακέραιου $\mathrm{A} \cdot 5^{\mu-\nu}$, χωρίζουμε από τ΄ αριστερά προς τα δεξιά, μ ψηφία του και βάζουμε την υποδιαστολή. Άρα η πιθανότητα περατούμενης διαιρέσεως, εξαρτάται μόνο από τον παρονομαστή του αναγώγου που περιλαμβάνει δύο μόνο πρώτους και για κάθε φυσικό εκθέτη, ενώ όλες οι δυνητικές περιπτώσεις είναι άπειρες, καθώς οι πρώτοι (όπως ευφυώς απέδειξε ο Ευκλείδης) είναι άπειροι στο πλήθος. Επομένως η πιθανότητα είναι 0 και μπορούμε να ισχυριστούμε, ότι *«όλοι οι ρητοί είναι δεκαδικοί περιοδικοί, εκτός απ΄αυτούς που έχουν περίοδο το 9»*, οι οποίοι –και μόνον αυτοί- μπορούν να παρασταθούν με περατούμενη μορφή. (Υπενθυμίζουμε την διπλή αναπαράσταση ενός ρητού με περίοδο το 9, λ.χ. $4,213\overline{9} = 3,213999999... = 3,214$) Το

γενικότερο συμπέρασμα είναι, ότι όλα τα συστήματα αρίθμησης, αποτυγχάνουν παταγωδώς όχι μόνον να παραστήσουν τους αρρήτους, αλλά και τους ρητούς, αφού ένας ρητός μπορεί να έχει μια οσοδήποτε μεγάλη περίοδο η οποία μπορεί να άρχίζει από οσοδήποτε μεγάλο πλήθος ψηφίων μετά την υποδιαστολή. Τα καταφέρνουν ακριβώς μόνο στους «χ-αδικούς» (εδώ δεκαδικούς) ρητούς, οι οποίοι είναι οι μόνοι που έχουν περατούμενη παράσταση!

Η πιθανότητα επιλογής αρτίου από το σύνολο των Φυσικών $\mathbb{N}$, είναι (διαισθητικά) προφανώς $\frac{1}{2}$. Διότι αν ζ(ν) παριστάνει το πλήθος των ζυγών έως και το ν, τότε $p=\lim_{x\to\infty}\frac{\zeta(\nu)}{\nu}=\frac{\frac{\nu}{2}}{\nu}=\frac{1}{2}$ $(\nu, \alpha\rho\tau\iota o\varsigma)$ *ή* $p=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\nu-1}{2}}{\nu}=\frac{1}{2}$ $(\nu, \pi\varepsilon\rho\iota\tau\tau\acute{o}\varsigma)$ παρ΄ότι η απεικόνιση μεταξύ Φυσικών και Αρτίων που ορίζεται από την σχέση $\nu \leftrightarrow 2\nu$, είναι 1-1 και επί, δηλ. έχουν ίσους πληθικούς αριθμούς!

Μάλιστα, στην περίπτωση των συνόλων Τελείων τετραγώνων και Φυσικών, έχουμε την απεικόνιση $\nu \leftrightarrow \nu^2$ που κι αυτή είναι 1-1 και επί (πάντα κόντρα στην κοινή ανθρώπινη διαίσθηση) Από άλλη όμως οπτική, η ταυτότητα $(\nu+1)^2-\nu^2=2\nu+1$ μπορεί να αναγνωστεί ως *«υπάρχει οσοδήποτε μεγάλο διάστημα μεταξύ δύο διαδοχικών τετραγώνων»* δηλ., ότι «τα τέλεια τετράγωνα «αραιώνουν» απεριόριστα αυξανομένων των φυσικών. Βεβαίως, αν αναζητήσουμε την πιθανότητα επιλογής τελείου τετραγώνου από τους φυσικούς, θα αναζητήσουμε το $\lim_{\nu\to\infty}\frac{\pi\lambda\acute{\eta}\theta o\varsigma\ \tau\varepsilon\lambda\varepsilon\acute{\iota}\omega\nu\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\gamma\acute{\omega}\nu\omega\nu\ \acute{\varepsilon}\omega\varsigma\ \tau o\ \nu}{\nu}=\lim_{\nu\to\infty}\frac{[\sqrt{\nu}]}{\nu}=0$ και επομένως η πιθανότητα επιλογής τελείου τετραγώνου από τους φυσικούς είναι 0. (Νέα «γνωστική σύγκρουση»)

Στους πρώτους έχουμε ανάλογα αποτελέσματα: Αν ως π(x) ορίσουμε την συνάρτηση ως «το πλήθος των πρώτων αριθμών μέχρι και τον πραγματικό αριθμό x » , τότε αποδεικνύεται [7] ότι $\lim_{x\to\infty}\frac{\pi(x)}{x}=0$. Η ερμηνεία και εδώ του αποτελέσματος, είναι ότι η πιθανότητα επιλογής πρώτου από τους φυσικούς είναι 0, παρ΄ ότι η απεικόνιση $p_\nu \leftrightarrow \nu$, είναι 1-1 και επί του $\mathbb{N}$ (p_ν η ακολουθία των πρώτων αριθμών) Το αποτέλεσμα γίνεται πιο κατανοητό, αν σκεφθούμε ότι *«υπάρχουν οσοδήποτε μεγάλα διαστήματα χωρίς πρώτους αριθμούς»* (όπως και με τα τέλεια τετράγωνα προηγουμένως) Για παράδειγμα δεδομένου ενός φυσικού ν οσοδήποτε μεγάλου, η πεπερασμένη ακολουθία (ν+1)!+2, (ν+1)!+3,(ν+1)!+4,…,(ν+1)!+ν, (ν+1)!+(ν+1) είναι ακολουθία, ν διαδοχικών φυσικών όπου κανένας δεν είναι πρώτος, αφού όλοι είναι σύνθετοι μιας και εξάγεται ως κοινός παράγοντας από κάθε έναν, ο δεξιός προσθετέος.

Συμπερασματικά: Υπάρχουν εφικτά ενδεχόμενα σε έναν δειγματόχωρο με πιθανότητα πραγματοποίησης 0. Η αντίληψη των πεπερασμένων δειγματόχωρων, το ατελές προσωπικό εννοιολογικό κτίσιμο των εννοιών, μας εμποδίζει να το δούμε το αληθές. Το άπειρο δεν είναι έννοια διαισθητικά αντιλαμβανόμενη και κατανοούμενη. Μαθηματικά αντικείμενα μοιάζουν ίσα, ενώ είναι –αν νεολογίσουμε- «απείρως άνισα» και αντιστρόφως. Η διαίσθηση γενικώς είναι κάκιστος σύμβουλος. Η ενασχόλησή με υψιπετή και ανώτερα γενικά ερωτήματα δεν μπορεί να βασίζεται στην διαίσθηση. Δεν είναι πολλάκις έτσι, αν έτσι νομίζουμε.

Ερώτημα 6: Μπορούσε ο Κόσμος μας να ήταν καλύτερος; Η αυθόρμητη καταφατική απάντηση που δίνουν στο ερώτημα όλοι οι άνθρωποι, έρχεται σε απόλυτη αντίθεση με έναν απολύτως λογικό συλλογισμό του Λάϊμπνιτς (Leibitz) γνωστό και ως «τρίλημμα του Λάϊμπνιτς» [8] Σύμφωνα με αυτόν, ο κόσμος που έχει φτιάξει ο Θεός είναι ο καλύτερος δυνατός κόσμος όλων των δυνατών κόσμων που θα μπορούσαν ποτέ να υπάρξουν, διότι (χρήση της εις άτοπον απαγωγής) εάν μπορούσε να υπάρξει ένας καλύτερος κόσμος από τον σημερινό, τότε ο Θεός ως Παντοδύναμος θα μπορούσε να τον κατασκευάσει, ως Πάνσοφος θα γνώριζε πώς να τον κατασκευάσει και ως Πανάγαθος θα ήθελε να τον κατά σκευάσει. Άτοπο. Επομένως ο κόσμος μας είναι ο καλύτερος όλων όσων θα μπορούσαν να κατασκευαστούν. Βεβαίως η κατανόηση του αντιφατικού με την κοινή λογική αποτελέσματος, έχει ως λέξης κλειδί την ελευθερία επιλογών του ανθρώπου, η οποία δεν μπορεί να είναι μονότιμη και μονόδρομη, άρα όχι ελεύθερη.

Γενικότερα Συμπεράσματα. : Τα Μαθηματικά αντικείμενα μέσω αφαίρεσης και γενίκευσης της Φύσης, έχουν ιδιότητες που ένας μη μαθηματικός χαρακτηρίζει «μεταφυσικές» . Είναι άπειρα, είναι πεπερασμένα χωρίς όρια, περατά ως προς κάποιες ιδιότητές τους και άπειρα προς άλλες, έχουν διαστάσεις και πάνω από 3, κάποια έχουν διαστάσεις μη ακέραιες, κάποια άλλα είναι ίσα ενώ μοιάζουν άνισα, άλλα που μοιάζουν άνισα ενώ είναι ίσα, δυνατά εφικτά πραγματοποιούμενα κατασκευαστικά ενδεχόμενα δειγματικού χώρου με μηδέν όμως πιθανότητες πραγματοποίησής τους. Η μαθηματική λογική αποφαίνεται για προτάσεις που μοιάζουν σωστές ενώ δεν είναι και για προτάσεις που μοιάζουν λανθασμένες ενώ είναι σωστές. Τα ίδια τα Μαθηματικά ως λογικό σύστημα *«το λιγότερο αντιφατικό»* που γνωρίζουμε, σε συνδυασμό με την «παράλογη αποτελεσματικότητά τους» [2] σε όλους τους τομείς του επιστητού, δίνουν λαβή για γόνιμη φαντασία, εικασίες, υποθέσεις, θεωρίες, επαληθεύσεις, διαψεύσεις, αντιπαραδείγματα, αποδείξεις, αναλογική σκέψη, νοητικά πειράματα, μοντελοποίηση, όπου και οι εφαρμογές τους στην Φυσική να μοιάζουν έντονα ως μεταφυσικές [9] πάντα όμως μέσα στα Επιστημολογικά όρια της «Διαψευσιμότητας» όπου και τελικά η συμβολή των Μαθηματικών στον εν γένει ανθρώπινο Επιστημονικό και Φιλοσοφικό στοχασμό να καθίσταται πραγματικά, άκρως απαραίτητη.

Summary: Mathematics objects and relationships that govern, help some answers of philosophical thought. Some mathematical models, expand the boundaries between possible, improbable, possible and impossible. Mathematics, have limits on their answers. But still a super tool for discussion on all questions of science and particularly the philosophy. The questions concerning the infinity are of particular interest because, whatever the findings set out in it, is not easily accepted by the finite human nature. Here comes the mathematical truth to venture some answers more or less acceptable.

Βιβλιογραφία:

[1] Wigner, Eugene *The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences.* Δικτυακός τόπος https://www.dartmouth.edu/~matc/MathDrama/reading/Wigner.html

[2] Νεγρεπόντης Στυλιανός –Φαρμάκη Βασιλική *Η «παράλογη» αποτελεσματικότητα των Μαθηματικών στις άλλες Επιστήμες*. Δικτυακός τόπος: http://thalesandfriends.org/wp-content/uploads/2012/03/efficiency.pdf

[3] Παναγιώτου Νικόλαος, *Ανάλυση Αποφάσεων* δικτυακός τόπος: http://panayiot.simor.ntua.gr/attachments/039_06MBAOR.pdf

[4] Pascal Blaise Σκέψεις (τμήμα 233), μεταφρασμένο, με σχόλια Δικτυακός τόπος: https://onthewaytoithaca.wordpress.com/2010/08/23/pascals-wager-the-whole-thing/

[5] https://el.wikipedia.org/wiki/Παράδοξα_του_Ζήνωνα

[6] http://westcult.gr/index.php/arthrografia/philosophizing/posoi-kokkoi-ammou-apaitoyntai-gia-na-katalavoun-ton-synoliko-ogko-tou-sympantos

[7] Λαρεντζάκη Ευαγγελία «Οι Πρώτοι Αριθμοί» (Διπλωματική Εργασία) ΕΜΠ 2012 Διατίθεται εδώ: http://www.math.ntua.gr/~sofia/dissertations/Larentzaki.pdf

[8] Σύντομο Βιογραφικό Σημείωμα για τον Gottfried Wilhelm Leibnitz http://www.biblical-studies.gr/kbma/Portals/0/PDF/Tehnes/Laibnitz.pdf

[9] Δανέζης Μάνος «Από την Κλασική στην Κβαντική Φυσική (Από την Μεταφυσική στην Φυσική)» άρθρο προσωπικού Ιστολογίου, διατίθεται εδώ http://manosdanezis.gr/index.php/blog/307-2015-02-07-18-53-16

[10] «Υπάρχει το 0,99999…; » Ερώτημα στο φόρουμ των φοιτητών του Μαθηματικού Τμήματος του Παν. Αθηνών με 115 μηνύματα. Διατίθεται εδώ: http://forum.math.uoa.gr/viewtopic.php?f=15&t=10116&start=0

[11] «Does 0.9999999... truly equal 1?» Ερώτημα σε παγκόσμιο μαθηματικό φόρουμ, με 76 μηνύματα. Διατίθεται εδώ: https://www.linkedin.com/grp/post/1872005-6044962556768956419
[12] «Περιοδικός αριθμός» Λήμμα στην Ελληνική Wikipedia. Διατίθεται: https://el.wikipedia.org/wiki/Περιοδικός_αριθμός
[13] «Το στοίχημα του Πασκάλ» https://onthewaytoithaca.wordpress.com/2010/08/23/pascals-wager-the-whole-thing

Ο νέος τρόπος διδασκαλίας της Γεωμετρίας, και τα δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά.

Γιάννης Π. Πλατάρος
Διευθυντής Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης Μεσσηνίας
Καπετάν Κρόμπα 37, 242 00 ΜΕΣΣΗΝΗ Ηλ.Ταχ. plataros@gmail.com
Ιστολόγιο: http://plataros.blogspot.gr/

Περίληψη : Τα δυναμικά Γεωμετρικά λογισμικά, παρ'ότι νέα, έχουν αρχαία καταγωγή ως προς τον έλεγχο εικασιών, ισχυροποίηση υποθέσεων και ανακάλυψη προτάσεων και θεωρημάτων,παρ ότι αυτό επιμελώς αποκρύπτεται από την επίσημη μαθηματική βιβλιογραφία άρα ο ρόλος τους στην επανανακάλυψη της γνώσης όπως απαιτούν οι νέες διδακτικές προσεγγίσεις είναι εκ των ών ουκ άνευ.
Λέξεις κλειδιά : sketchpad, δυναμικά λογισμικά, Γεωμετρία,

2 Εισαγωγή

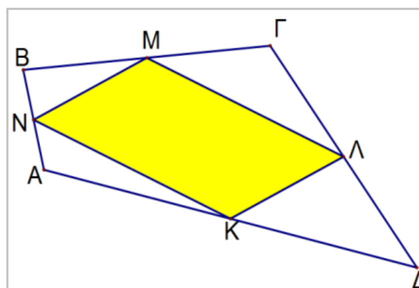
Υπάρχουν κάποιοι απλουστευμένοι αφορισμοί, πλην όχι ιδεολογικά αδιάφοροι για το τι είναι Μαθηματικά. λ.χ. «Μαθηματικά=Απεικονίσεις» ή «Μαθηματικά=Απόδειξη» που κατά καιρούς λέγονται και ακούγονται. Ωστόσο, η ενεργός εξελισσόμενη ουσία των Μαθηματικών είναι η ίδια η Μαθηματική Ανακάλυψη, για την ουσία της οποίας δεν υπάρχει κάποιος γνωστός αφορισμός. Με δεδομένη την σύγχρονη τάση της Παιδαγωγικής που αφορά στην «Ανακαλυπτική Μάθηση» και με δεδομένα τα σύγχρονα υπάρχοντα εκπαιδευτικά εργαλεία, δηλ. εκπαιδευτικά λογισμικά που ευνοούν τον σχηματισμό ισχυρών εικασιών και υποθέσεων, για την ανακάλυψη μαθηματικών προτάσεων και την εν συνεχεία απόδειξή τους, δημιουργείται η κατ'αρχήν εύλογη απορία γιατί δεν έχουν εισαχθεί αυτονοήτως στην καθημερινή μαθησιακή διαδικασία. Η ισχυρή μαθηματική παράδοση του Ευκλείδη που συστηματικοποίησε και ταξινόμησε την έως τότε μαθηματική ανακάλυψη με θαυμαστό, πρωτοποριακό, αυστηρό και απόλυτα λογικό τρόπο, έδρασε καταλυτικά και έκτοτε κατέστη παγκόσμιο μαθηματικό υπόδειγμα- πρότυπο μαθηματικής διάρθρωσης –παρουσίασης μιας μαθηματικής θεωρίας. Αποτέλεσμα αυτού ήταν να αποκρύβεται επιμελέστατα ο πειραματικός και ο ενίοτε «δια μηχανικών μεθόδων» τρόπος μαθηματικής έρευνας για την ανακάλυψη των προτάσεων, πράγμα που αποτελεί δεσπόζον υπόδειγμα και για σήμερα. Τα νέα Γεωμετρικά εκπαιδευτικά λογισμικά, εισάγουν ολιστικές προσεγγίσεις για τα μαθηματικά, καθώς προσφέρουν πειραματισμό για εξαγωγή και ισχυροποίηση εικασιών, δυνατότητα χιλιάδων παρατηρήσεων καθώς ένα σχήμα μεταβάλλεται δυναμικά και πλέον η παρατήρηση-εικασία είναι ισοπόσως ισχυρή και άρα εδραία.

Παράλληλα, ο πειραματισμός, δίνει την ευκαιρία να χρησιμοποιηθούν μέθοδοι εργασίας που χρησιμοποιούν οι πειραματικές επιστήμες ως προς την εξαγωγή των μαθηματικών τους συμπερασμάτων, όχι όμως και τα ίδια τα μαθηματικά για τον εαυτό τους (!) αφού τα όποια «μαθηματικά για τα μαθηματικά» παρουσιάζονται στην τελική τους μορφή ως «πρόταση-απόδειξη» χωρίς τίποτα να προηγείται της «πρότασης» Παραλλήλως, αυτά τα Γεωμετρικά εργαλεία εισάγουν φυσικούς τρόπους σύνδεσης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με την Ανάλυση, την Άλγεβρα και την Φυσική, πράγματα σπουδαία διδακτικώς για την ορθή αντίληψη-μοντέλο των μαθητών γι αυτούς τους σπουδαίους τομείς του επιστητού. Στην παρούσα εργασία, θα παρουσιάσουμε ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα που επαληθεύουν τα προηγουμένως ισχυριζόμενα.

3. Η διερευνητικές και ανακαλυπτικές δυνατότητες ενός δυναμικού Γεωμετρικού Εργαλείου, (λ.χ. του Sketchpad)

3.1. Μια γνωστή πρόταση, λέει, *ότι «τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου, είναι κορυφές παραλληλογράμμου»*. Την επιλέγουμε επίτηδες, αφού είναι πολύ γνωστή και απλή και δεν προοιωνίζεται κάτι αρκετά γόνιμο από την μελέτη της. Μια δυνητική διατύπωση, μπορεί να την κάνει «ανοικτής διατύπωσης» και να έχουμε μια εκφώνηση του τύπου *«Να μελετήσετε τι σχήμα ορίζουν τα μέσα των πλευρών τετραπλεύρου. Να το αποδείξετε και να διερευνήσετε ειδικές περιπτώσεις ανακαλύπτοντάς τες, διατυπώνοντάς τες και αποδεικνύοντάς τες.»* Αυτό βεβαίως θέλει όπως θα δούμε παραπάνω χρόνο, θέλει «συνέχεια διερεύνησης κατ΄οίκον» υπό τύπον μικρής εργασίας, όμως η χαρά της ανακάλυψης (ενδεχόμενης, πλην πιθανότατα αναμενόμενης για το συγκεκριμένο επιλεγμένο παράδειγμα) προσδίδει την χαρά της ουσίας της Μαθηματικής ανακάλυψης και όχι μόνον την χαρά της ανακάλυψης της απόδειξης προς την οποία επικεντρώνεται η διδασκαλία. Μπορούμε να ισχυριστούμε μάλιστα, ότι η ανακάλυψη της πρότασης είναι πιο σπουδαία από την ανακάλυψη της απόδειξης, η οποία και αυτή είναι σπουδαία, και ουδόλως παραγνωρίζεται η μέγιστη σημασία της στα Μαθηματικά. Απλώς, τίθεται στην μαθηματικώς ορθή της διάσταση και σειρά, δηλ. έπεται- νομοτελειακά- της ανακάλυψης, την επισημοποιεί και την επισφραγίζει. Ας δούμε τι μπορεί να ανακαλυφθεί:

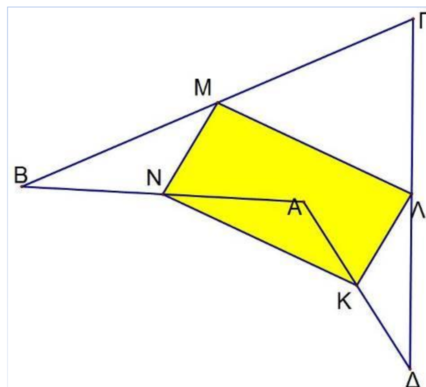
Α) Η όποια τυχαία κίνηση των πλευρών δείχνει ότι έχουμε οπτικά ένα σχήμα παραλληλογράμμου. Η πρόταση φαίνεται ως αποτέλεσμα φαινομενικά απείρων πειραμάτων, η πρόταση είναι εκεί, αποδεκτή, προφανής ίσως, ωστόσο, το «**γιατί** είναι παραλληλόγραμμο» είναι ένα ερώτημα ουσίας του επιστητού πάσης επιστήμης, που από πολλές και για πάρα πολλά ερωτήματά τους που



Σχήμα1: Με την κίνηση των Α,Β,Γ,Δ, η οπτική εντύπωση για την διατήρηση του ΚΛΜΝ ως παραλληλογράμου, είναι εδραία. Η απόδειξη μπορεί να έλθει ως εύλογη αναγκαιότητα -εξήγηση για το «γιατί»

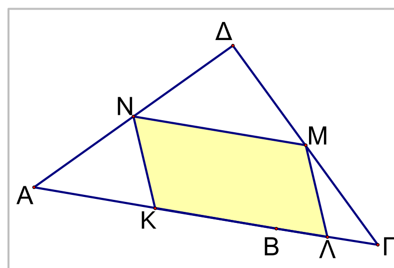
περιέχουν το **«γιατί»** πλην των Μαθηματικών, μένουν αναπάντητα και ανοικτά. Για παράδειγμα, ενώ δεν γνωρίζουμε **γιατί έλκονται** δύο σώματα που έχουν μάζα, γνωρίζουμε κάλλιστα το **πώς έλκονται** (Νόμος Παγκόσμιας έλξης Νεύτωνος) Το «γιατί» είναι παραλληλόγραμμο συνιστά την απόδειξη και είναι όντως η καρδιά των Μαθηματικών, ας έχουμε την ισχυρή εποπτεία του λογισμικού. (σχήμα 1)

Β) Καθώς κινούμε μια κορυφή τυχαία στο επίπεδο μπορούμε να φθάσουμε στο σχήμα 2, όπου υπάρχει μια πιθανότητα ο Μαθητής να δει το σχήμα –ανάλογα με τις εμπειρίες του- ως μη κυρτό τετράπλευρο είτε ως στρεβλό τετράπλευρο στον χώρο. Αυτό μπορεί να το «δει» και από το σχήμα1, όμως η δυσκολία να φανταστεί ότι υπάρχει «κάμψη» , «τσάκισμα» κατά μήκος μιας διαγωνίου, απαιτεί γνώση της έννοιας «στρεβλό τετράπλευρο και πώς σχεδιάζεται σε επίπεδο. Το μη κυρτό το γνωρίζει, αφού στα διδακτικά βιβλία, αφού γίνει ο ορισμός του κυρτού σχήματος και του μη κυρτού, τίθεται το διδακτικό συμβόλαιο «από τώρα και στο εξής όταν θα λέμε «τετράπλευρο» θα εννοούμε μόνο το κυρτό. Και αυτό το συμβόλαιο, από μόνο του, αποτελεί δυσκολία στο να αντιληφθεί το σχήμα, δεν είναι όμως και αδύνατον.



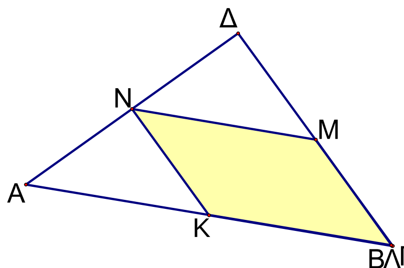
Σχήμα 2 : Σε μια τέτοια τυχαία διάταξη, μπορεί να ειδωθεί ότι η πρόταση ισχύει μάλλον και ισχύει και για μη κυρτά σχήματα και για τα στρεβλά τετράπλευρα (αν γνωρίζει την έννοια του στρεβλού τετραπλεύρου)

Γ) Η ειδική οριακή περίπτωση όπου τα Α,Β, Γ είναι συνευθειακά, (σχήμα 3) δίνει μια καινούργια πρόταση που χρειάζεται διατύπωση και απόδειξη. Η απόδειξη μιας απλούστερης πρότασης όπως αυτή, πρέπει να υποθέσουμε ότι είναι ευκολότερη και ταυτόχρονα δίνει και την ίδια ιδέα για την απόδειξη της γενικότερης πρότασης. Μάλιστα το Β, δύναται να ευρίσκεται και στην προέκταση του ΑΓ. (Προκύπτει από περεταίρω παρατήρηση)



Σχήμα 3 : Η ειδική περίπτωση όπου τα Α,Β,Γ είναι συνευθειακά, δείχνει και εκεί ισχύ της πρότασης με επαναδιατύπωση ότι «…στην Τρίτη πλευρά παίρνουμε τυχαίο σημείο και βρίσκουμε τα μέσα των δύο τμημάτων που χωρίζει την πλευρά. Ομοίως ελαφρά τροποποιείται και η απόδειξη.

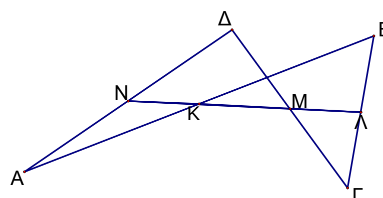
Δ) Άλλη ειδική οριακή περίπτωση είναι όταν λ.χ. τα Β και Γ συμπίπτουν (και άρα το μέσον τους Λ) (σχήμα 4) Εδώ η απόδειξη είναι ακόμα πιο απλή και από την προηγούμενη περίπτωση και πάλι δίνει το κλειδί για την χρήση γνωστής πρότασης για την απόδειξη. Η αναδιατύπωση της



Σχήμα 4 : Η πιο απλή ειδική περίπτωση επάγει την ίδια ιδέα και για την απόδειξη.

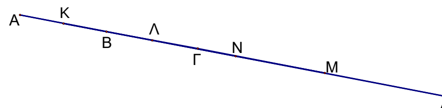
πρότασης είναι πλέον «Τα μέσα των πλευρών τριγώνου με κάθε κορυφή του είναι κορυφές παραλληλογράμμου»

Ε) Μια άλλη ειδική περίπτωση είναι πολύ πιο εντυπωσιακή: Σε κάποια στιγμή, φαίνεται το παραλληλόγραμμο να εκφυλίζεται σε ευθύγραμμο τμήμα. Εκεί αν ο μαθητής διερευνήσει το «πότε εκφυλίζεται το παραλληλόγραμμο σε ευθύγραμμο τμήμα» θα δει, ότι αυτό φαίνεται να συμβαίνει όταν Τα ΒΔ και ΑΓ που δεν είναι σχεδιασμένα εξ αρχής, είναι παράλληλες πλευρές τραπεζίου. Πάρα πολύ εντυπωσιακό, όταν με μεταγνωστικές αναστοχαστικές διαδικασίες, ο μαθητής μπορεί να δει μια διαφορετική πρόταση της Γεωμετρίας ως οριακή περίπτωση μιας άλλης φαινομενικά άσχετης.[1]



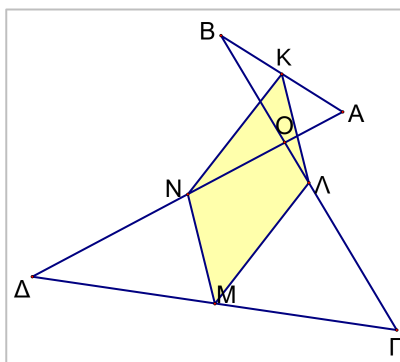
Σχήμα 5 : Η οριακή περίπτωση του εκφυλισμού του παραλληλογράμμου, δίνει την πρόταση που συνδέει την διάμεσο τραπεζίου με τις βάσεις του!

ΣΤ) Καθώς τα Α,Β,Γ,Δ γίνονται συνευθειακά, έχουμε μια άλλη επίσης γνωστή ενδιαφέρουσα περίπτωση πρότασης –άσκησης που μπορεί να λυθεί με τις στοιχειώδεις ιδιότητες των ευθ. τμημάτων ή και των διανυσμάτων.



Σχήμα 6: Η οριακή περίπτωση των συνευθειακών Α,Β,Γ, και Δ δίνει μια ενδιαφέρουσα γνωστή πρόταση στα ευθύγραμμα τμήματα.

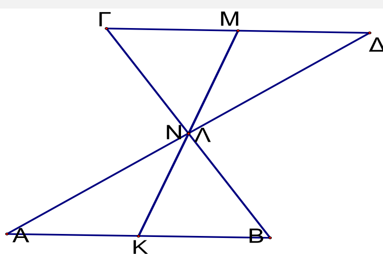
Ζ) Μια άλλη τυχαία περίπτωση διερεύνησης, μπορεί να δώσει μια άλλη πρόταση της οποίας η διατύπωση είναι *«έστωσαν δύο τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ που έχουν κατά κορυφής τις γωνίες τους Ο . Αν Κ,Λ,Μ,Ν είναι αντιστοίχως τα μέσα των ΑΒ,ΒΓ,ΓΔ,ΔΑ , να δείξετε, ότι το ΚΛΜΝ είναι παραλληλόγραμμο.»*



Σχήμα 7 Τα «κατά κορυφήν τρίγωνα» δίνουν μια άλλη πρόταση.

Η) Μια άλλη οριακή περίπτωση του ιδίου σχήματος δίνει την πρόταση που λέει, ότι «το συμμετρικό ενός τριγώνου ως προς μια κορυφή του, έχει ίση αντίστοιχη διάμεσο ως προς το σημείο συμμετρίας.» (σχήμα 8)

Θ) Ως άλλες περιπτώσεις ειδικές που προκύπτουν με πιο άμεσο τρόπο, είναι η αναζήτηση για το πότε το παραλληλόγραμο είναι ορθογώνιο, πότε ρόμβος και πότε τετράγωνο είναι μια κίνηση που απορρέει από την επιτυχή απόδειξη, με κάποιο αναστοχασμό.

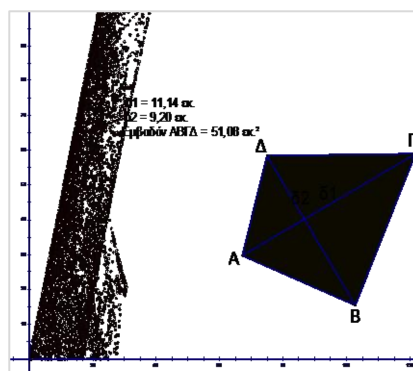


Σχήμα 8

[1] Ο συγγραφέας της παρούσης εργασίας, προσέθεσε άλλη μια απόδειξη στην προσωπική του συλλογή αποδείξεων ότι «η διάμεσος τραπεζίου ισούται με το ημιάθροισμα των βάσεών του» την οποία έχει ξεκινήσει από το ….Γυμνάσιο (προ τεσσαρακονταετίας τουλάχιστον) και δεν την έχει ολοκληρώσει ακόμη, φοβούμενος ότι «όλο και κάποια άλλη πιο απλή απόδειξη θα υπάρχει που δεν την έχει σκεφθεί ακόμη!»

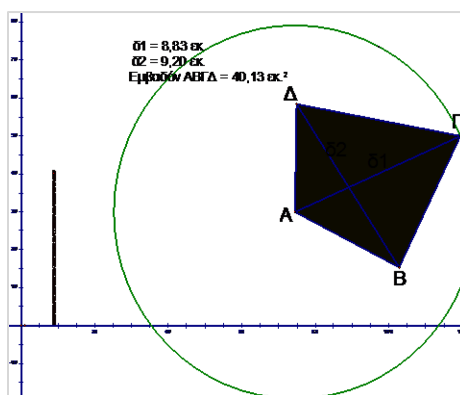
3.2. Υπάρχει μια άλλη γνωστή πρόταση που λέει ότι «το εμβαδόν ενός τετραπλεύρου, ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του, επί το ημίτονο της γωνίας που σχηματίζουν» (Είναι συμπληρωματικές και έχουν ίδιο ημίτονο) Η απόδειξη της πρότασης είναι από εκείνες τις φοβερές αποδείξεις του τύπου «Φέρω, αυτό κι αυτό, παρατηρώ αυτά και απεδείχθη!» Η διδακτική των Μαθηματικών, λέει ότι «για να λύσεις μια άσκηση, θα πρέπει πρώτα να έχεις λύσει μια παρόμοια-ανάλογη ευκολότερη» Η Ευκλείδεια θεώρηση της απόδειξης λέει:« Από τις τέσσερις κορυφές του τετραπλεύρου, φέρω παραλλήλους προς την διαγώνιο , δημιουργείται ένα μεγάλο παραλληλόγραμμο και άλλα τέσσερα μικρά παραλληλόγραμμα, από τα οποία τα μισά εκάστου, συνιστούν το τετράπλευρο και άρα το τετράπλευρο έχει εμβαδόν το μισό του παραλληλογράμμου» και κάπου εκεί τελειώνει η απόδειξη. Ας δούμε πώς θα μπορούσε να το αντιμετωπίσει ένας μικρός καταρτισμένος ερευνητής: Α) Να σκεφθεί ότι ο τύπος για το εμβαδόν συναρτήσει των διαγωνίων, δεν μπορεί να είναι $\delta_1 \pm \delta_2$ αφού μήκος και μήκος κάνει μήκος και όχι εμβαδόν, ούτε $\frac{\delta_1}{\delta_2}$, αφού μήκος δια μήκος κάνει καθαρό αδιάστατο αριθμό –λόγο κτλ Ο μαθητής μπαίνει για πρώτη φορά σε μάθημα Γεωμετρίας σε λογική ελέγχου τύπου από άποψη διαστάσεων, πράγμα που είναι στην καθημερινή λογική της Φυσικής, όχι όμως και της Γεωμετρίας. Β) Μπορεί ο μαθητής να εκτελέσει πειραματικά τον αλγόριθμο που επίσης χρησιμοποιείτα ικαθημερινά στις πειραματικές επιστήμες, αλλά όχι στην Γεωμετρία, ότι «όταν αναζητώ σύνδεση ενός μεγέθους Α συναρτήσει άλλων, β,γ, δ,… τα διατηρώ όλα σταθερά και «κουνάω» (μεταβάλλω) μόνο το ένα το β και βλέπω την γραφική του παράσταση Α(β) . Έπειτα διατηρώ αυτό σταθερό και τα υπόλοιπα και κουνάω ένα άλλο και παρατηρώ την μεταβολή του μεγέθους Α(γ), κ.ο.κ. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα, με την βοήθεια του λογισμικού sketchpad, μπορεί να μεταβάλλει την μία διαγώνιο και να βλέπει την μεταβολή του εμβαδού του τετραπλεύρου. Η μεταβολή αυτή, δίνει ως γραφική παράσταση ευθεία γραμμή, άρα βγαίνει η βάσιμη εικασία ότι ο τύπος είναι της μορφής $\alpha \cdot \delta_1 \cdot \delta_2$ όπου α κάποιο αδιάστατο μέγεθος .

Γ) Εφαρμόζοντας την γραφική παράσταση της μεταβολής του Εμβαδού συναρτήσει του μήκους τις μιας διαγωνίου, λαμβάνει μια εικόνα όπως φαίνεται στο Σχήμα 9. Το δ_1 αυξομειώνεται καθώς κινώ το Γ, κα ιτο εμβαδόν Ε, δίνει μια εικόνα νέφους αν κινώ ταχέως ή συνεχούς γραμμής σε βραδία κίνηση του Γ. Υπάρχει σαφές όριο μια ευθεία και το όριο της ευθείας διαγράφεται

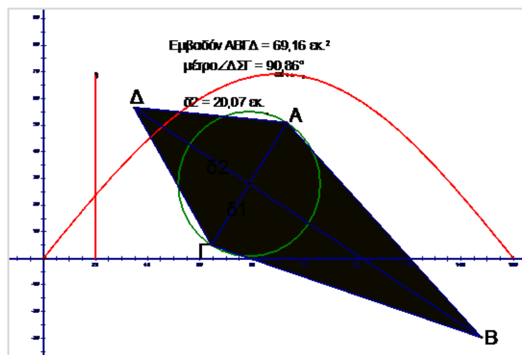


Σχήμα 9 Καθώς κινείται το δ_1 και μεταβάλλεται το εμβαδόν (κίτρινο μέρος) βλέπουμε, ότι έχουμε ένα νέφος σημείων και ένα όριο μιας ευθείας.

όταν κινούμαι σε κάθετη θέση ως προς την δ_2. Εκεί ο μαθητής έχει εναλλακτικές σκέψεις, που πρέπει να είναι σε θέση να κάνει (με τις υφιστάμενες πρακτικές σε διδασκαλία, σε λογική αναλυτικών προγραμμάτων και κυρίως εμπειριών, μάλλον δεν μπορεί) Όμως θα έπρεπε να ήταν σε μαθησιακή ετοιμότητα να μπορεί να δει κάποια από τα παρακάτω, ότι δηλ. το νέφος αυτό : α) Δεν παριστάνει συνάρτηση μονότιμη, απ'αυτές που γνωρίζει. β) ο τύπος $\alpha \cdot \delta_1 \cdot \delta_2$ εξακολουθεί να ισχύει ως εικασία και το α του τύπου, είναι μεν αδιάστατο μέγεθος, αλλά όχι υποχρεωτικά σταθερό. Τα μόνα αδιάστατα μεταβλητά μεγέθη που γνωρίζει ο μαθητής είναι οι τριγωνομετρικές συναρτήσεις. Μέγιστο στις 90^0 (κάθετη σχέση των διαγωνίων) έχουμε μόνο στο ημίτονο. Μπορεί τότε να σταθεροποιήσει τα δ_1 και δ_2 κατά μέγεθος και να δει την μεταβολή του Εμβαδού, συναρτήσει της γωνίας είτε του ημιτόνου της. Αν τυχόν εργαστεί να κατασκευάσει κύκλο με κέντρο το Α και ακτίνα ΑΓ , με το Γ να κινείται στον κύκλο, έχουμε το σχήμα10 . Πάλι δεν έχουμε εικόνα συνάρτησης, αλλά μεταβολής του Εμβαδού μεταξύ μιας ελάχιστης θέσης και μιας μέγιστης που αντιστοιχεί σε κάθετη θέση των δ_1 και δ_2 , ενώ στην ελάχιστη, σε κάποια αλλοίωση του σχήματος , καθώς το σχήμα σε διάφορες θέσεις γίνεται εκτός από τετράπλευρο, τρίγωνο, δύο τρίγωνα, μη κυρτό τετράπλευρο και αντιστρόφως. Σε κάθε περίπτωση, τα δ_1 και δ_2 είναι σταθερά κατά μέγεθος και η παρουσία μιας τρίτης μεταβλητής (γωνία ή τριγωνομετρικός της αριθμός) πρέπει να μπορεί να εικασθεί τουλάχιστον από έναν μαθητή που έχει συνηθίσει να εργάζεται σε ανακαλυπτικές λογικές. Φαίνεται μια συνέχεια ανεξαρτήτως σχήματος. Φαίνεται δηλαδή η ολότητα, που περιέχει όλα τα γενικά και ειδικά σχήματα, καθώς από την μία θέση στην άλλη υπάρχει ομαλή συνεχής διαδοχή. Αναπόφευκτα, επιβάλλεται τρόπον τινά και η διερεύνηση αυτών των περιπτώσεων, πέραν της εκφωνήσεως του προβλήματος, ας ήταν και η δεδομένη εκφώνηση «ανοικτή». Ομιλούσε μόνο για τετράπλευρο, ενώ τυχαία αλλά σίγουρα, στον δυναμικό χειρισμό εμφανίζονται όλες οι ειδικές περιπτώσεις.

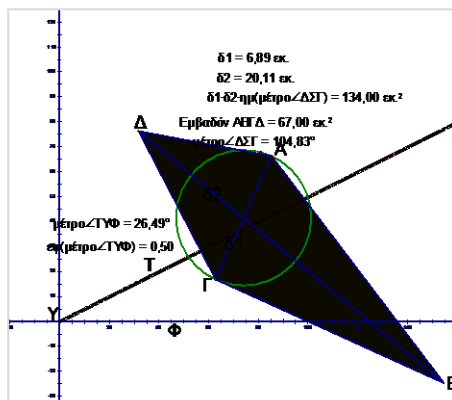


Σχήμα 10: Το δ_2 είναι σταθερό «θέσει μεγέθει» ενώ το δ_1 μόνο μεγέθει και λαμβάνει όλες τις δυνατές θέσεις καθώς περιστρέφεται περί το Α.



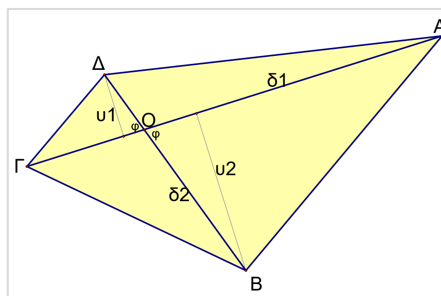
Σχήμα 11 Το Ε(φ) διαγράφει την καμπύλη, καθώς δ_2=ct κατά θέση και μέγεθος ενώ δ_1=ct μόνο κατά μέγεθος, καθώς το δ_1 περιστρέφεται περί την τομή των διαγωνίων. Η καμπύλη διαγράφεται δύο φορές σε κάθε πλήρη στροφή του Γ.

Αν αντί του Α ως κέντρο κύκλου , λάβει το σημείο τομή των διαγωνίων και ως φ ονομάσουμε μία γωνία των διαγωνίων δ_1 και δ_2 , τότε ως Ε(μέτρο φ) λαμβάνουμε μια καμπύλη του σχήματος 12, απ'όπου μπορεί να προκύψει και ως εικασία ο τύπος $\mathrm{E} = \beta \cdot \delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \eta\mu\varphi$, όπου β πλέον μια σταθερά η γραφική παράσταση της μεταβλητής (χ,ψ)=($\delta_1 \cdot \delta_2 \cdot \eta\mu\varphi$, Ε) δίνει ευθεία, η κλίση της οποίας είναι σταθερή 0,50 δηλ. το ½ του τύπου. (Σχήμα 13)



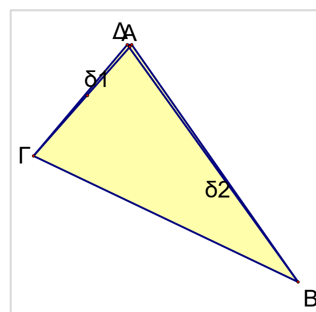
Σχήμα 12: Η μέτρηση της κλίσης δίνει το 0,50 Ενώ το τετράπλευρο μεταβάλλεται καθ' οιονδήποτε τρόπο (δηλ. το Γ, περί τον κύκλο και το δ_2 αυξομειούμενο, το (χ,ψ)=($\delta_1\delta_2$ημφ,Ε) μεταβάλλεται σε ευθεία γραμμή με κλίση 0,50 και ο τύπος Ε=1/2 $\delta_1\delta_2$ημφ, έπεται αμέσως.

Φυσικά για να το κατορθώσει αυτό ένας μαθητής, θα πρέπει να έχει μάθει να ασκείται σε ένα τέτοιο τρόπο προσέγγισης, ο οποίος κατά τα κρατούντα, ειωθότα και πρακτικές, προσομοιάζεται με τρόπο εργασίας σε μια εργαστηριακή άσκηση Φυσικής και καθόλου Μαθηματικών. Βεβαίως μια εξ αρχής τριγωνομετρική προσέγγιση, μπορεί να εξάγει τον τύπο από τριγωνομετρική σκοπιά και να μην χρειαστεί αυτή η προσέγγιση. (Σχήμα 14) Εκτός από την προσέγγιση της λεζάντας του σχήματος υπάρχει και η Ε=(ΟΑΒ)+(ΟΒΓ)+ΟΑΔ)+(ΟΔΓ)= ½ (ΟΑ)(ΟΒ)ημφ+ ½ (ΟΑ)(ΟΔ)ημ(π-φ)+ ½ (ΟΔ)(ΟΓ)ημφ + ½ (ΟΓ)(ΟΒ)ημ(π-φ) = ½ ημφ[(ΟΑ)(ΟΒ)+ (ΟΑ)(ΟΔ)+ (ΟΔ)(ΟΓ)+ (ΟΓ)(ΟΒ)]= ½ ημφ[ΟΑ(ΟΒ+ΟΔ)+ΟΓ(ΟΔ+ΟΒ)]= ½ ημφ [ΟΑ δ_2 +ΟΓδ_2] =1/2 ημφδ_2(ΟΑ+Γ)= ½ $\delta_2\delta_1$ημφ



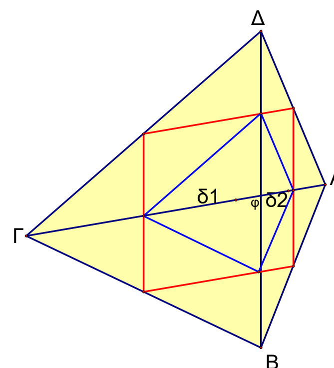
Σχήμα 13:
$$\mathrm{E} = \frac{1}{2}\delta_1\upsilon_1 + \frac{1}{2}\delta_1\upsilon_2 = \frac{1}{2}\delta_1(\upsilon_1 + \upsilon_2) =$$
$$\frac{1}{2}\delta_1(\mathrm{O\Delta}\,\eta\mu\varphi + \mathrm{OB}\,\eta\mu\varphi) = \frac{1}{2}\delta_1(\mathrm{O\Delta} + \mathrm{OB})\eta\mu\varphi =$$
$$\frac{1}{2}\delta_1\delta_2\eta\mu\varphi$$

Δ) Στον δυναμικό χειρισμό του σχήματος έχουμε τις περιπτώσει, κατά τις οποίες το τετράπλευρο εκφυλίζεται σε τρίγωνο. Εκεί η πιο ενδιαφέρουσα είναι και η πιο ειδική όπου έχουμε στο σχήμα 15, το Δ να ταυτίζεται «σχεδόν» με το Α και οι αντίστοιχες γωνίες και πλευρές ήτοι δ_1 ≡ΑΓ≡ ΔΓ και δ_2 ≡ ΑΒ≡ΔΒ Εκεί, οριακά είναι γνωστό για το τρίγωνο, ότι ισχύει ο τύπος Ε= ½ $\delta_1\delta_2$ημΑ. Εκεί πρέπει να δει ο μικρός ερευνητής ότι Α≡Δ≡φ, όπου φ η γωνία των διαγωνίων. Η απειροστική ματιά δεν είναι κάτι που συνηθίζεται στην Ευκλείδεια Γεωμετρία μέχρι



Σχήμα 14 Η οριακή περίπτωση όπου το Δ σχεδόν ταυτίζεται με το Α αλλά διατηρείται το σχήμα οριακά τετράπλευρο και τείνει να γίνει τρίγωνο, φαίνεται να ισχύει ο τύπος ο γνωστός για τα τρίγωνα ότι το Εμβαδόν ισούται με το ημιγινόμενο δύο πλευρών επί το ημίτονο της περιεχομένης γωνίας.

σήμερα, αλλά πλέον η δυνατότητα αυτή, είναι διαθέσιμη και παιδαγωγικά αξιοποιητέα.
Ε) Μια άλλη ειδική περίπτωση οριακή, μπορεί να επάγει και ένα είδος γενίκευσης του Εμβαδού τριγώνου ως «ένα δεύτερο βάση επί ύψος» σε «ένα δεύτερο βάση, επί το μήκος οποιουδήποτε τμήματος από την απέναντι κορυφή και τέμνοντος την βάση επί το ημίτονο μιας γωνίας που σχηματίζει με την βάση.» Αυτή η γενίκευση για το εμβαδόν, παρ ότι αδόκιμη, εμφανίζει τον κλασικό τύπου ως ειδική περίπτωση, αφού στην ειδική θέση του ύψους έχω ημ90^0=1 και ο τύπος ισχύει ειδικά.
Στ) Μια θεώρηση που συνδέει το προηγούμενο παράδειγμα με το παραλληλόγραμμο από τα μέσα τετραπλεύρου και το εμβαδόν του συναρτήσει των διαγωνίων του, είναι στο σχήμα 15. Το σημείο τομής των διαγωνίων, ορίζε ι4 τρίγνωνα με κοινή κορυφή, έκαστο των οποίων χωρίζεται σε 4 ίσα τρίγωνα λόγω των μέσων και των σχέσεων παραλληλίας που υφίστανται. Επειδή το κόκκινο παραλληλόγραμμο έχει εμβαδόν συναρτήσει των πλευρών του $\frac{\delta_1}{2}\cdot\frac{\delta_2}{2}\cdot\eta\mu\varphi$, το τετράπλευρο λόγω των ίσων ανά 4 τριγώνων, θα έχει διπλάσιο, ό.έ.δ.



Σχήμα15:

4. Συμπεράσματα από την διαπραγμάτευση των δύο παραδειγμάτων

Παραδείγματα αναφορών - βιβλιογραφίας

Για τη βιβλιογραφία – αναφορές θα γίνει χρήση του προτύπου της A.M.S., όπως περιγράφεται στη συνέχεια του παραδείγματος.

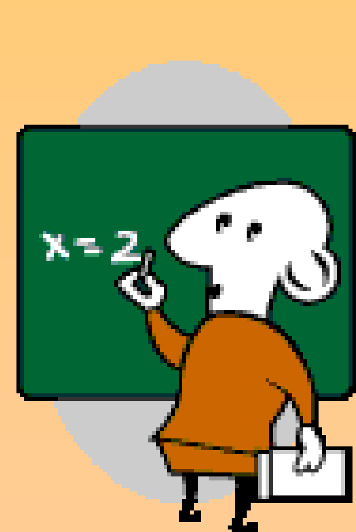
Ο Alan Sokal [2] προτείνει το βιβλίο των Bourbaki [1] για μία καλή εισαγωγή στη θεωρία συνόλων.

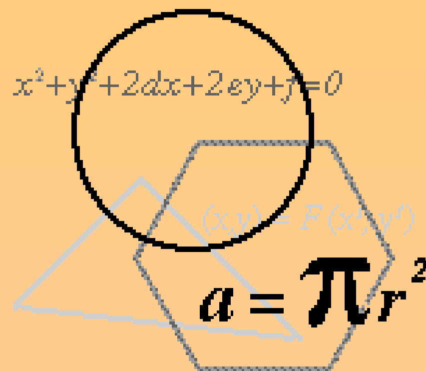
Βιβλιογραφία

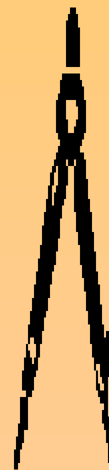
[1] Nicolas Bourbaki, *Theorie des ensembles,* Hermann, Paris, 1970.

[2] Alan Sokal, *Trangressing the boundaries: Toward a transformative hermeneutics of quantum gravity,* Social Text **46/47** (1996), 217-252.

Διευκρίνιση εννοιών του Απειροστικού, μέσω παραδειγμάτων







10784.36
9÷1
2.719372



Εισήγηση:

Γιάννης Π. Πλατάρος

Μαθηματικός-Μ.Π.Ε. στην Διδακτική & Μεθοδολογία των Μαθηματικών
Δ/ντής 1ου Γεν. Λυκείου Μεσσήνης.

Τα περισσότερα παραδείγματα υπάρχουν στην περιοδική έκδοση

Το Φ

Νοέμβριος 2008 (Τεύχος 5)

Περιοδική έκδοση επικοινωνίας και διαλόγου στα Μαθηματικά

Υπεύθυνος έκδοσης

Β.Ε. Βισκαδουράκης

Είναι αληθές, ότι κάθε πραγματικός αριθμός, έχει μονοσήμαντη δεκαδική αναπαράσταση;

Απάντηση: Δεν είναι αληθές. Κάθε άρρητος, έχει πράγματι μονοσήμαντη δεκαδική αναπαράσταση, την οποία όμως γνωρίζει μόνον ο ...Θεός! Όσον αφορά όμως τους ρητούς, έχομε, ότι κάθε ρητός, έχει δύο ισοδύναμες δεκαδικές αναπαραστάσεις. Παραδείγματα:

$2 = 1,9999...$ ή 17,23999999999....=17,24

Η απόδειξη των παραπάνω, μπορεί να γίνει είτε με μαθηματικά της Β' Γυμνασίου είτε της Β' Λυκείου

λ.χ.: Αν $a = 1,99999......$ τότε

$$10a = 19,99999 \Leftrightarrow 9a = 18,00000... \Leftrightarrow a = 2$$

Ή

$$\mathbf{17,23999...=17,23}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\frac{9}{10^5}+.... \underset{\varphi\theta.\gamma\varepsilon\omega\mu.\pi\rho\acute{o}\delta o\varsigma}{=} 17,23+\frac{\frac{9}{10^3}}{1-\frac{1}{10}}=17,23+\frac{9}{10^4}=1,24$$

Είναι αληθές ότι οι πλέον συνηθισμένοι ρητοί αριθμοί που υπάρχουν είναι οι δεκαδικοί τερματιζόμενοι που χρησιμοποιούμε στην καθημερινή μας ζωή;

$$\frac{\alpha}{2^{\mu} \cdot 5^{\nu}} \qquad (\alpha, 2^{\mu} \cdot 5^{\nu}) = 1$$

"Σχεδόν όλοι" οι ρητοί, είναι δεκαδικοί περιοδικοί.

Κάποιες ερωτήσεις πάνω στους αριθμούς:

- Ποίος είναι ο επόμενος ακέραιος του 5;
- Ποίος ο επόμενος ρητός του $\frac{1}{2}$;

ΔΕΝ ΥΠΑΡΧΕΙ!

(απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο)

Επιστημολογικό εμπόδιο.

Όλοι συνήθως εικάζουν ότι κάποιος υπάρχει, που δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε!

Όχι όμως και ότι δεν υπάρχει.

Μια εξελισσόμενη εικόνα για τους αριθμούς:

- Αν εκλέξω 1 τρις ρητούς από το (0,1) , τότε η πιθανότητα να επιλέξω δεκαδικό τερματιζόμενο είναι 0
- Αν επιλέξω 1 τρις πραγματικούς από το (0,1) , τότε η πιθανότητα να επιλέξω ρητό είναι 0.
- Αν από το (0,1) αφαιρέσω τους ρητούς του και τους αλγεβρικούς του (άπειροι αλλά αριθμήσιμοι) πάλι θα έχει μήκος 1.
- Αν από το (0,1) αφαιρέσω το σύνολο του Cantor (υπεραριθμήσιμο) πάλι θα έχει μήκος 1.

ΙΣΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Εάν δύο συναρτήσεις έχουν ταυτόσημες αναλυτικές εκφράσεις (: τύπους) είναι ίσες;

__*Απάντηση:*__ Όχι απαραιτήτως. π.χ.:

$f(x) = 2x / \{-1,0,1\}$ και $g(x) = 2x / [-1,1]$

Προφανώς $f \neq g$ αφού $\mathcal{D}(f) \neq \mathcal{D}(g)$

Εάν δύο συναρτήσεις έχουν διαφορετικές αναλυτικές εκφράσεις (: τύπους) είναι πάντα διαφορετικές;

__*Απάντηση:*__ Όχι απαραιτήτως. π.χ.

$f(x) = 2x / \{-1,0,1\}$ και $g(x) = 2x^3 / \{-1,0,1\}$

Ισχύει $f = g$, ενώ οι αναλυτικές εκφράσεις είναι διαφορετικές.

Εάν $f(x)\cdot g(x)=0\ \forall x\in A$, όπου A το κοινό πεδίο ορισμού των f,g, τότε μια τουλάχιστον από τις f,g είναι η σταθερή μηδενική συνάρτηση;

Απάντηση: Όχι απαραιτήτως. π.χ.

Αν $f(x)=\begin{cases}0 & \text{αν } x \text{ άρρητος}\\ 1 & \text{αν } x \text{ ρητός}\end{cases}$ $\quad g(x)=\begin{cases}1 & \text{αν } x \text{ άρρητος}\\ 0 & \text{αν } x \text{ ρητός}\end{cases}$

τότε $f(x)\cdot g(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$ χωρίς καμία να είναι σταθερή.

Επιπλέον, το αντιπαράδειγμα των f,g είναι τέτοιο ώστε να πληροί και την επιπρόσθετη προϋπόθεση ότι **«δεν υπάρχει υποδιάστημα στο πεδίο ορισμού της f είτε της g που ο περιορισμός της f ή της g αντιστοίχως, να είναι η μηδενική συνάρτηση».**

Να αποδειχθεί η ισχύς ή η μη ισχύς εν γένει, των ισοτήτων:

α) $f\circ(g+h)=f\circ g+f\circ h$

β) $(g+h)\circ f=g\circ f+h\circ f$

όπου f,g,h: συναρτήσεις $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

__Απάντηση:__ Η α) δεν ισχύει πάντα, ενώ η β) ισχύει πάντα! Πράγματι:

α) Αν θεωρήσω: $f(x)=x^2$, $h(x)=1$, $g(x)=1$. Τότε

$$[f\circ(g+h)](x)=f(g(x)+h(x))=f(1+1)=f(2)=2^2=4$$

$$[(g+h)\circ f](x)=(g+h)(f(x)=(g+h)(x^2)=g(x^2)+h(x^2)=1^2+1^2=2.$$

β) Ισχύει πάντα: Πράγματι, $\forall x\in\mathbb{R}$, έχουμε:

$$[(g+h)\circ f](x)=(g+h)(f(x))=g(f(x))+h(f(x))$$

$$=h(f(x))+g(f(x))=(h+g)(f(x))=[(h+g)\circ f](x)$$

Να αποδειχθεί ότι <u>όλες</u> οι παρακάτω προτάσεις είναι ψευδείς!

(i) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$ τότε $f(x) = \ell$.

(ii) Αν η f δεν ορίζεται για $x = x_0$, τότε το $\lim_{x \to x_0} f(x)$ δεν υπάρχει.

(iii) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, τότε $\lim_{x \to x_0} [f(x) - g(x)] = 0$.

(iv) Αν $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \ell$, τότε και $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$.

(v) Αν $f(x) < g(x)$ *για όλα τα* χ που ανήκουν στο κοινό πεδίο ορισμού τους, $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$, τότε $\ell_1 < \ell_2$.

ΣΥΝΕΧΕΙΑ

Να αποδειχθεί ότι η παρακάτω πρόταση είναι ψευδής:
«Αν μια συνάρτηση *f* είναι ασυνεχής στο x_0 τότε και ο περιορισμός της *f* σε κάθε διάστημα που περιέχει το x_0 θα είναι επίσης ασυνεχής».

__Απάντηση:__ Για τη συνάρτηση f:

$$f(x)=\begin{cases} -1 & \alpha\nu \quad x<0 \\ 1 & \alpha\nu \quad x\geq 0 \end{cases}$$ έχω $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-1\neq \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1=f(0)$.

Δηλαδή η *f* δεν είναι συνεχής στο $x_0=0$, αλλά αν θεωρήσω τον περιορισμό $g=f/[0,+\infty)$ έχω ότι

$$\lim_{x\to 0} g(x)=1=g(0).$$

Επομένως, η πρόταση είναι ψευδής.

Υπάρχει παράδειγμα συναρτήσεως που δεν πληροί τις συνθήκες της υποθέσεως του Θ. Bolzano, «*στον μέγιστο δυνατό βαθμό*» ενώ παράλληλα , πληροί το συμπέρασμα, επίσης «*στον μέγιστο δυνατό βαθμό*».

Απάντηση: «Ιδανικό παράδειγμα» αποτελεί η συνάρτηση του Dirichlet.

$f : f(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \quad x \quad \text{ρητός} \\ 0, & \text{αν} \quad x \quad \text{άρρητος} \end{cases}$ ορισμένη στο $[\alpha, \beta]$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Γι΄ αυτήν ισχύει:

- $f(\alpha) \cdot f(\beta) \geq 0 \ \forall \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Δηλαδή η άρνηση της συνθήκης $f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0$)
- Η f ασυνεχής $\forall x_0 \in [\alpha, \beta]$ (Δηλαδή δεν είναι συνεχής ούτε σε ένα σημείο του πεδίου ορισμού της , αυτό απαιτεί τον ακολουθιακό ορισμό της σύγκλισης και εκφεύγει των πλαισίων της Γ' Λυκείου)

Ως αντίστοιχο «συμπέρασμα» έχουμε ότι η $f(x) = 0$ έχει άπειρες ρίζες στο πεδίο ορισμού της και μάλιστα υπεραριθμήσιμες!

Μάλιστα, και το πεδίο ορισμού μπορεί να εκληφθεί απεριόριστα μικρό (δηλαδή $\beta - \alpha < \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$) χωρίς να επηρεάζονται αυτά που ισχύουν για την ανάρτηση αυτή.

Δίνεται η πρόταση: «Αν η συνάρτηση f, είναι συνεχής στο διάστημα (α, β) τότε η f έχει ένα ολικό μέγιστο και ένα ολικό ελάχιστο στο (α,β) Αν είναι αληθής να αποδειχθεί, αν είναι ψευδής να αποδειχθεί η αναλήθειά της με κατάλληλο αντιπαράδειγμα.

Απάντηση: Είναι ψευδής, αφού αυτή η πρόταση είναι αληθής μόνο για κλειστά διαστήματα της μορφής $[\alpha,\beta]$. Παράδειγμα, η

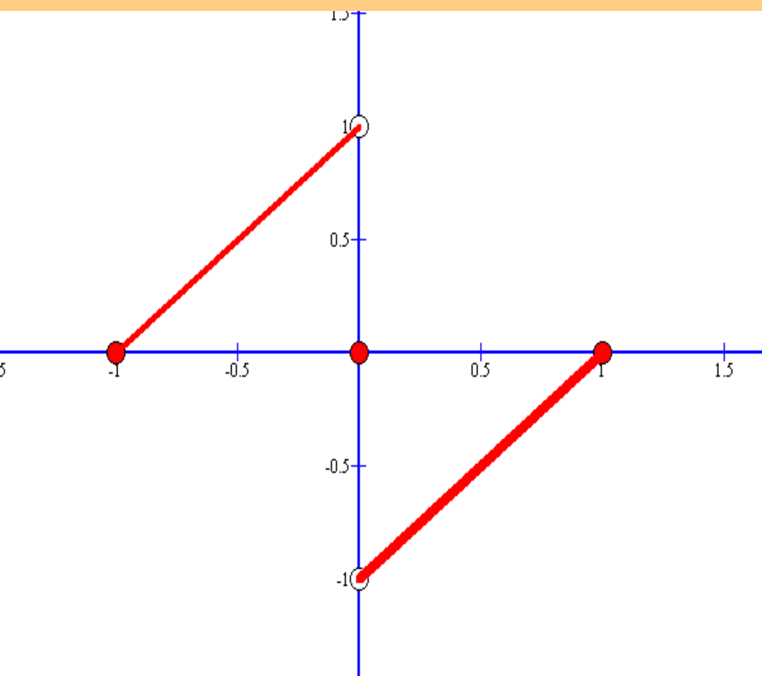
$$f : f(x) = \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} \Big/ (\alpha,\beta).$$

Ένα άλλο αντιπαράδειγμα είναι η $g : g(x) = \text{εφ}x \Big/ \left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ η οποία:

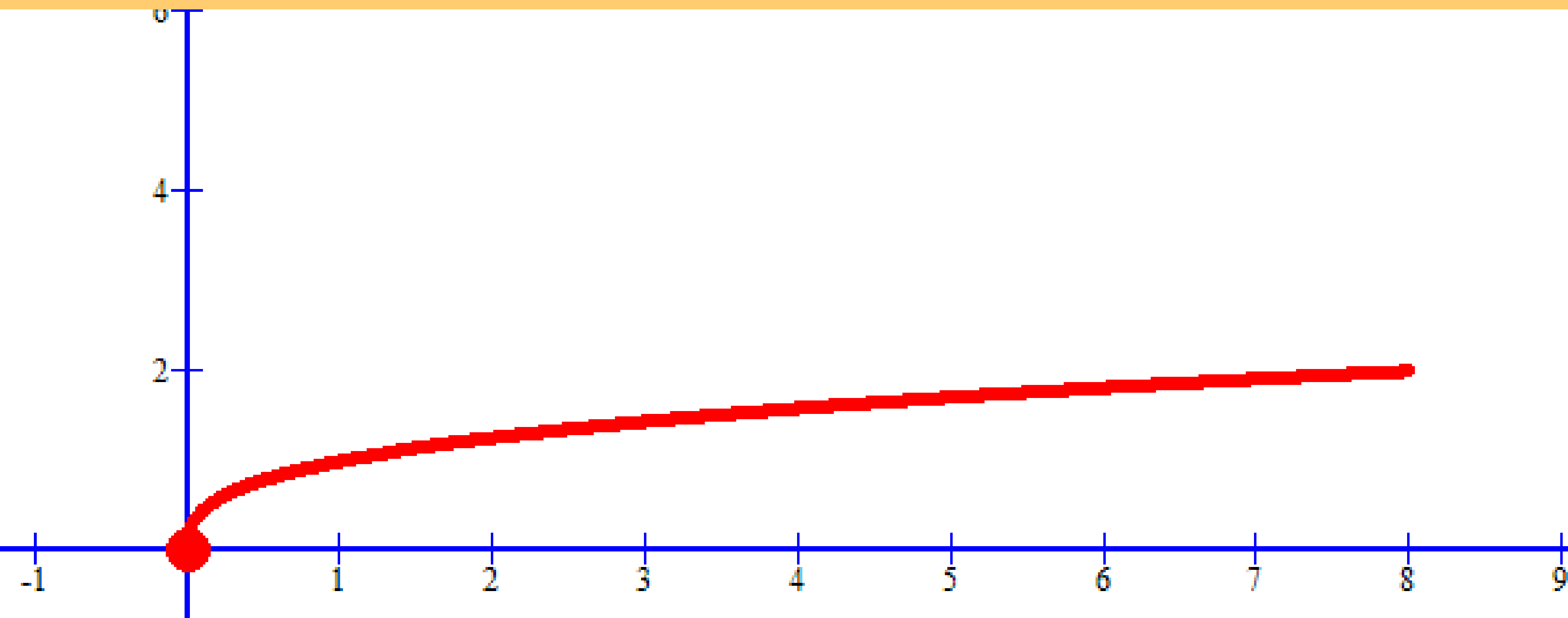
Είναι γνωστή η ισχύς της προτάσεως: «Αν η f είναι συνεχής στο κλειστό $[\alpha,\beta]$, τότε η f έχει ένα ολικό μέγιστο και ένα απόλυτο ελάχιστο στο $[\alpha,\beta]$.»

Να αποδείξετε τα εξής:

1) Η προϋπόθεση της συνέχειας στο $x_0 \in (\alpha,\beta)$ είναι απαραίτητη για την ισχύ του θεωρήματος
2) Η προϋπόθεση της συνέχειας στα άκρα του διαστήματος είναι επίσης απαραίτητη.
3) Να εξετασθεί αν ισχύει η αντίστροφη πρόταση.

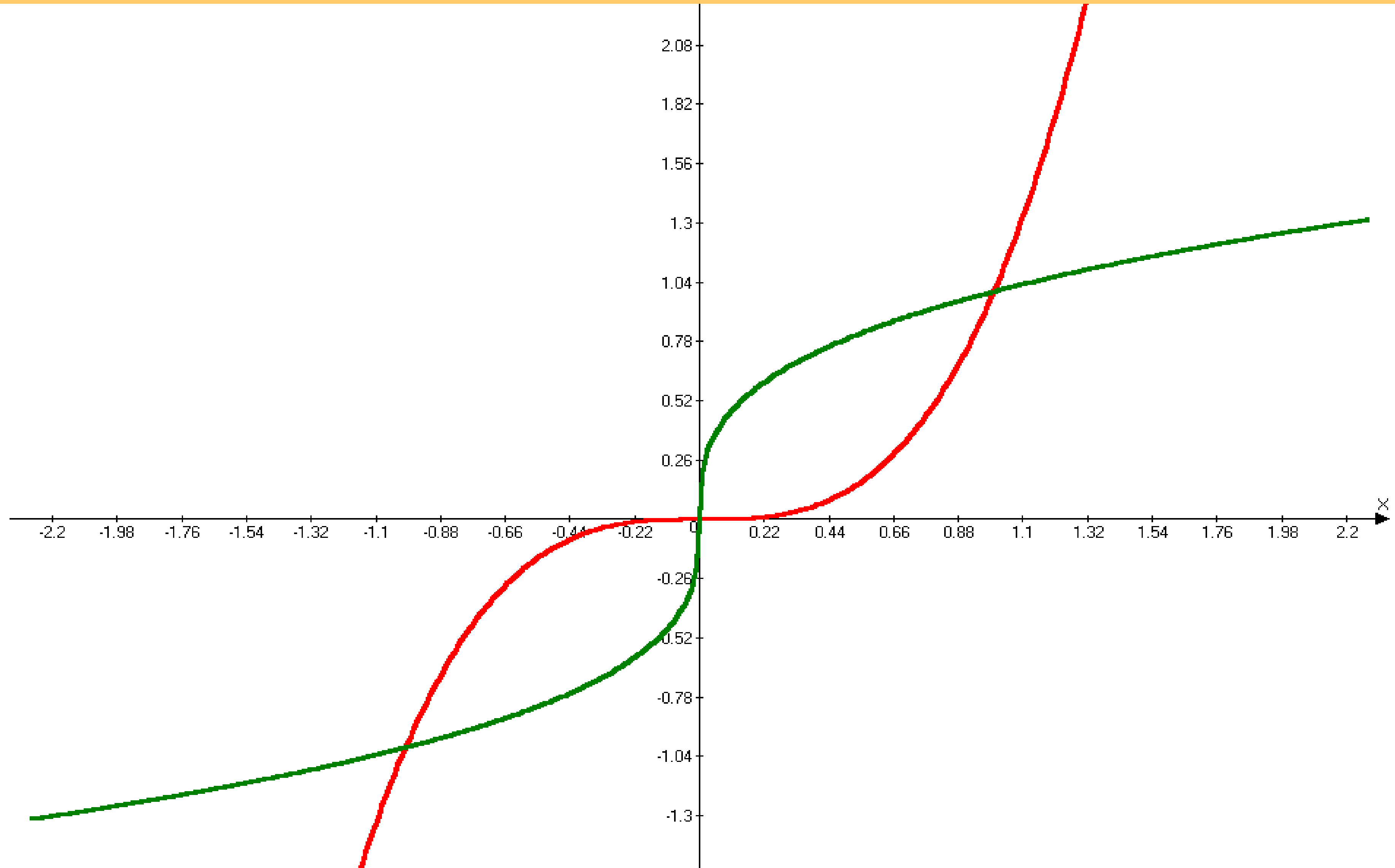


Αν στο γράφημα μίας συνάρτησης υπάρχει εφαπτόμενη σε κάθε σημείο του, τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη παντού;



Το γράφημα μια συνάρτησης είναι απολύτως «λείο», δεν έχει «ακίδες», οξείες, ορθές ή αμβλείες γωνίες, ευθύγραμμες ή καμπυλόγραμμες, ενώ σε κάθε σημείο του, υπάρχει εφαπτομένη ευθεία. Όμως η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη!

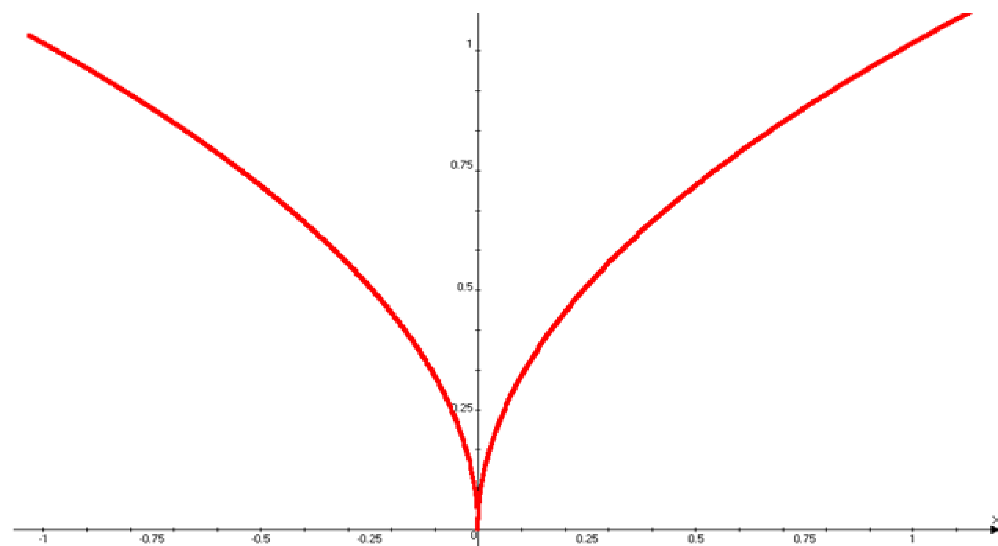
Πως μπορεί αυτό να είναι δυνατόν;



Ένας φοιτητής, επικαλούμενος το προηγούμενο παράδειγμα, έχει τη γνώμη, ότι η έννοια της παραγώγου είναι «ανεπαρκώς ορισμένη». Ισχυρίζεται ότι θα πρέπει να βρεθεί ένας τρόπος, ώστε για κάθε συνάρτηση (όπως και για την f(x)=x^(1/3)) να υπάρχει η έννοια της παραγώγου σε κάθε σημείο της, εάν και μόνο εάν υπάρχει εφαπτόμενη ευθεία σε αυτό το σημείο της. Ισχυρίζεται, ότι με αυτό τον τρόπο καλύπτουμε την παραγωγισιμότητα της σε κάθε σημείο της, πράγμα που έρχεται σε απόλυτη συμφωνία με την γεωμετρική εποπτεία και την αίσθηση του «λείου» γραφήματος

Υπάρχει αντιπαράδειγμα που να κλονίζει την πίστη και τους ισχυρισμούς του φοιτητή;

$$f(x)=\sqrt{|x|}=\begin{cases}\sqrt{x}, & x\geq 0\\ \sqrt{-x}, & x<0\end{cases}.$$



Στο σημείο 0 υπάρχει μοναδική εφαπτομένη του διαγράμματος της συνάρτησης ο άξονας yy' καθώς $f'_{\alpha}(0)=-\infty, f'(\delta)=+\infty$.

Εδώ και υπάρχει μοναδική ευθεία εφαπτομένη (με την εκ δεξιών και εξ αριστερών έννοια), αλλά δεν έχω κατ' ουδένα τρόπο «λεία συνάρτηση», αφού στο 0 έχω μια ένωση **δύο οιονεί «κερατοειδών γωνιών»**. Παράγωγο στο 0 δεν έχουμε, πράγμα που συμφωνεί με την εποπτεία και αντιβαίνει στην ιδέα της μοναδικής εφαπτομένης ευθείας. Αξίζει να σημειωθεί, ότι στο 0 δεν υπάρχει ούτε «κατ' εκδοχήν» παράγωγος, αφού οι εκ δεξιών και εξ αριστερών οριακές τιμές της παραγώγου είναι $+\infty$ και $-\infty$ αντιστοίχως.

Το θεώρημα Rolle έχει ως εξής: «Αν η f συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμη στο (α,β) και αν $f(\alpha)=f(\beta)$, τότε $\exists$ ένα τουλάχιστον ξ του (α,β), ώστε $f'(\xi)=0$».

Να αποδείξετε με χρήση τουλάχιστον αντιπαραδειγμάτων τα παρακάτω:

(i) Η προϋπόθεση της συνέχειας είναι εντελώς απαραίτητη.

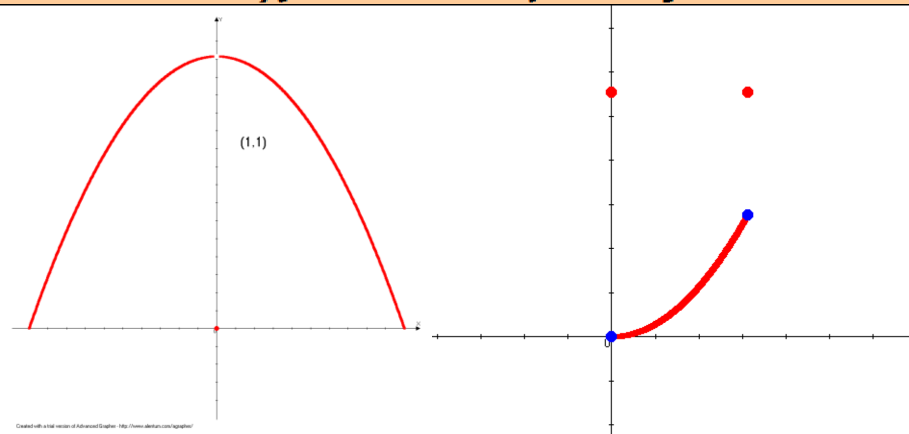
(ii) Η προϋπόθεση της συνέχειας σε κλειστό διάστημα είναι εντελώς απαραίτητη.

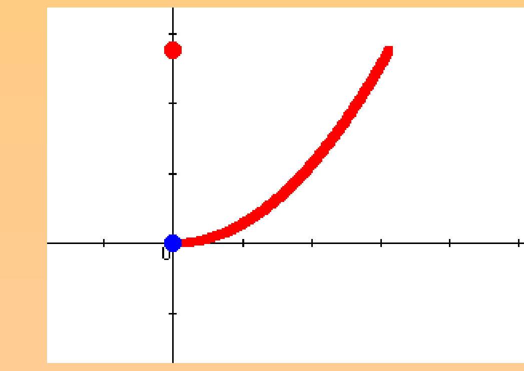
(iii) Η συνέχεια πρέπει να είναι $[\alpha,\beta]$ και όχι σε διάστημα (α,β) ή $[\alpha,\beta)$.

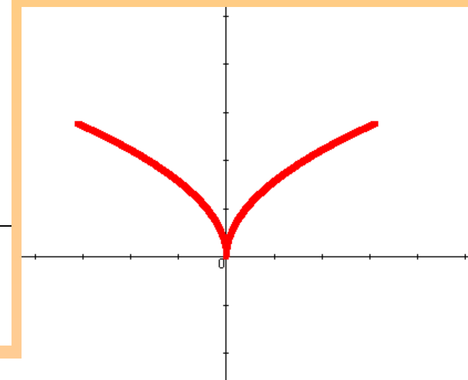
(iv) Η παραγωγισιμότητα στο (α,β) είναι απαραίτητη.

(v) Η συνθήκη $f(\alpha)=f(\beta)$ είναι απαραίτητη.

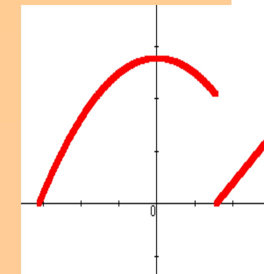
(vi) Οι συνθήκες του Θ.Rolle είναι ικανές για να ισχύει το συμπέρασμα, αλλά όχι και αναγκαίες. [3]





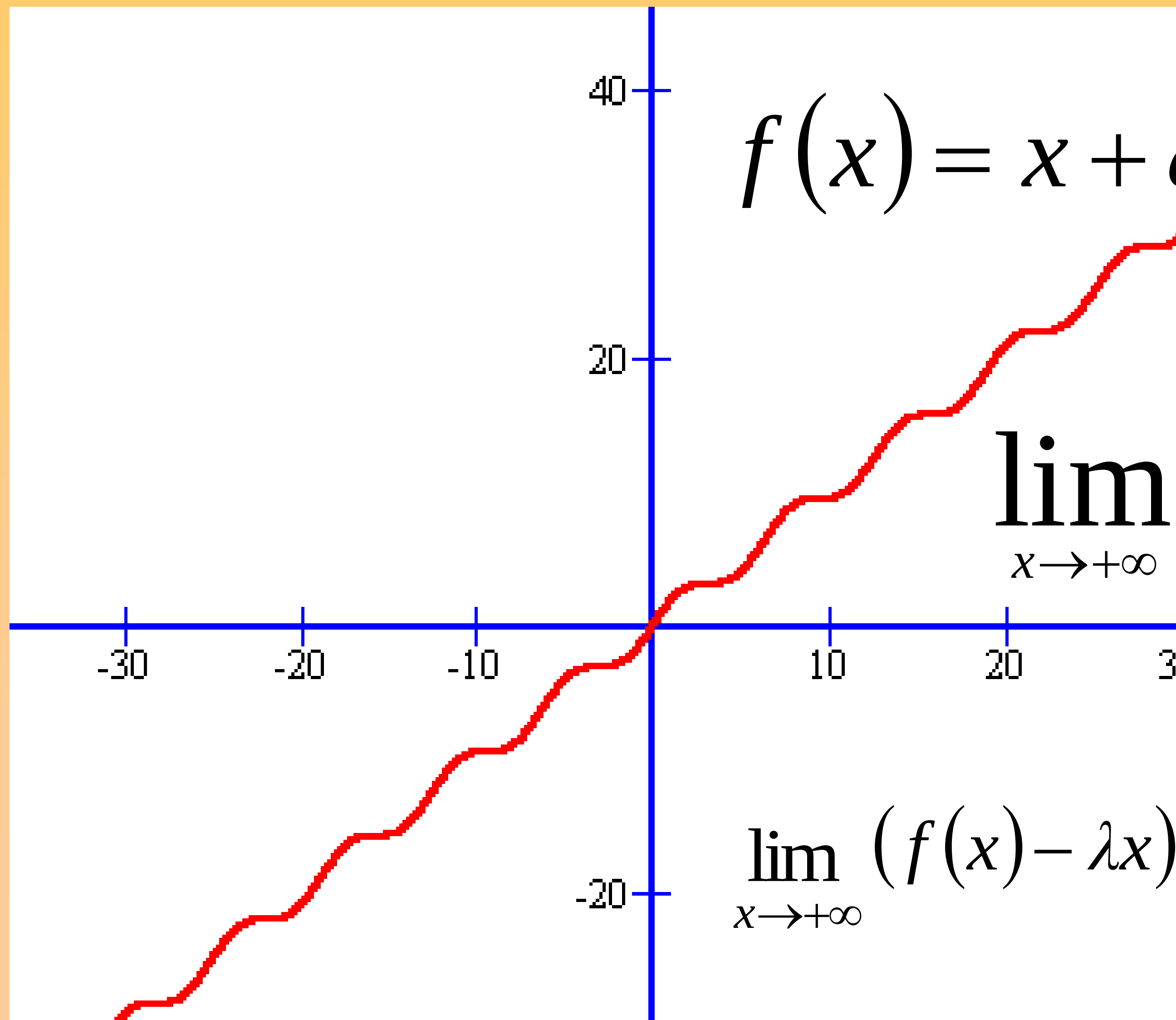






«Αν μία συνάρτηση *f* είναι παραγωγίσιμη σε διάστημα Δ και γνησίως αύξουσα σε αυτό, τότε f’(x)>0 για κάθε χ που ανήκει στο Δ».

Να αποδείξετε ότι η πρόταση είναι ψευδής.



$$f(x) = x + \sigma\upsilon\nu^2 x \,/\, \mathbb{R}$$

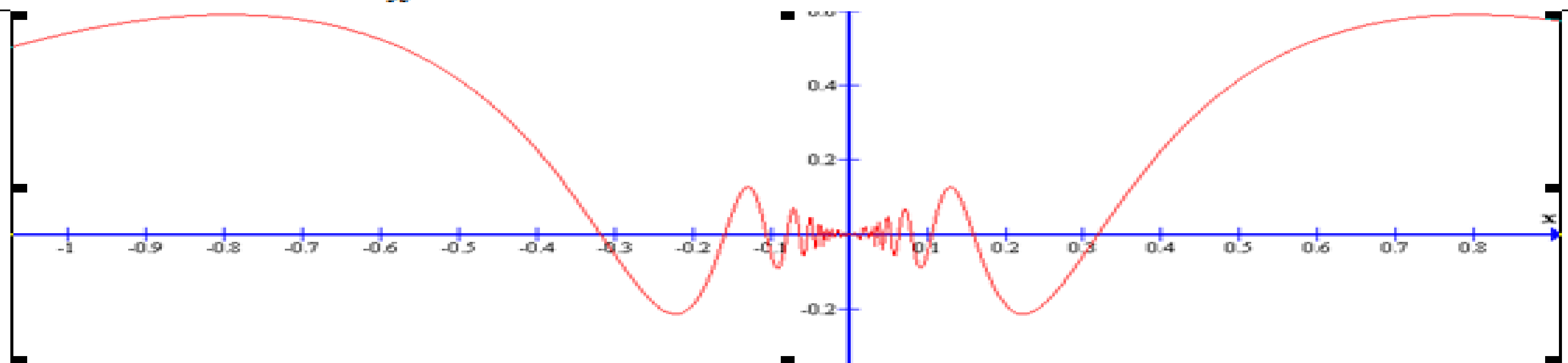
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - \lambda x\right) = \lim_{x\to+\infty} \sigma\upsilon\nu^2 x$$

Να αποδειχθεί, ότι είναι δυνατόν να μην υπάρχει το $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ και να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

Απάντηση: Το $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\varepsilon\varphi x}$ είναι της μορφής $\dfrac{0}{0}$ και

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2\eta\mu\frac{1}{x}}{\varepsilon\varphi x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{\varepsilon\varphi x}{x}}=\frac{0}{1}=0.$$



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\dfrac{x^2\eta\mu(\frac{1}{\chi})}{\varepsilon\phi(\chi)}$ σε μια περιοχή του μηδενός, όπου και εποπτικά φαίνεται η ύπαρξη του ορίου.

Όμως,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(x^2\eta\mu\frac{1}{x}\right)'}{(\varepsilon\varphi x)'}=\lim_{x\to 0}\cdot\frac{2x\eta\mu\frac{1}{x}-x^2\frac{1}{x^2}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x\eta\mu\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}-\lim_{x\to 0}\frac{\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}}=0-\frac{\lim\limits_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to 0}\sigma\upsilon\nu\frac{1}{x}$$

Με κατάλληλο αντιπαράδειγμα να αποδειχθεί το ψεύδος της παρακάτω προτάσεως:

«Αν οι f, g είναι παραγωγίσιμες και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\ell$ τότε και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\ell$».

Απάντηση: Θεωρώ $f(x)=x$, $g(x)=x+1$.

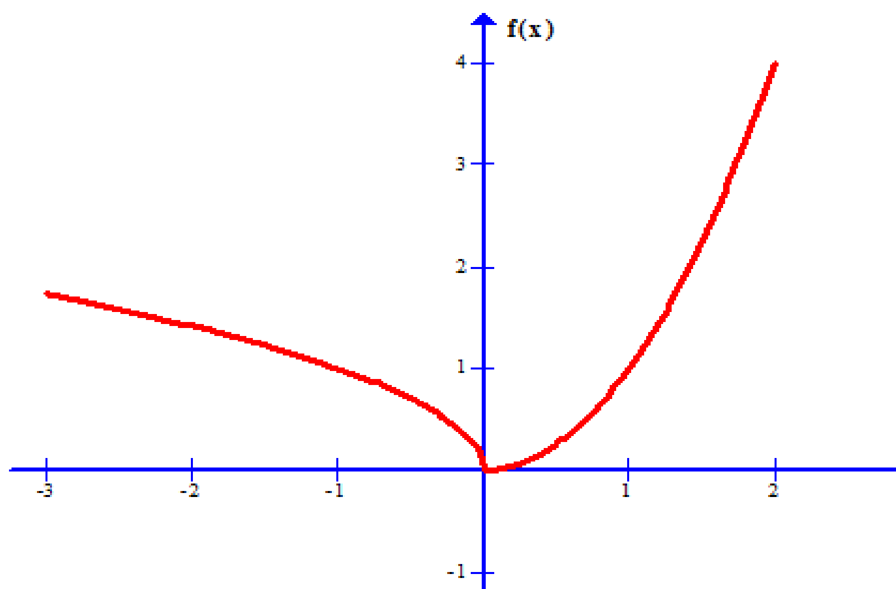
Τότε, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x+1}=\frac{0}{1}=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1}=1\neq 0$.

Επομένως η πρόταση είναι ψευδής. Όπως δείξαμε και στο προηγούμενο παράδειγμα, αληθής γενικά είναι η αντίστροφη πρόταση.

Να δοθεί παράδειγμα συνάρτησης, εκατέρωθεν σημείου x_0 της οποίας, να γίνεται αλλαγή κυρτότητας, αλλά στο x_0 να μην έχω σημείο καμπής .

Απάντηση: Θεωρώ την $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\begin{cases}\sqrt{-x}, & x<0\\ x^2, & x\geq 0\end{cases}$.

Στο $x_0=0$ η κυρτότητα αλλάζει είδος, αφού $f''(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4x\sqrt{-x}}, & x<0\\ 2, & x>0\end{cases}$ (δεν υπάρχει η $f''(0)$, αφού δεν υπάρχει και η $f'(0)$) και $f''(x)<0\ \ \forall x<0$, ενώ $f''(x)>0\ \ \forall x>0$.



Στο $x_0=0$ έχω $f'_{\alpha}(0)=-\infty$ και $f'_{\delta}(0)=0$.

Έτσι, στο $x_0=0$ δεν υπάρχει εφαπτομένη και επομένως το $x_0=0$ δεν είναι σημείο καμπής.

Υπάρχει περίπτωση, εκατέρωθεν ενός σημείου x_0, μια συνάρτηση f να έχει αλλαγή κυρτότητας και x_0 να μην είναι σημείο καμπής διότι το $x_0\notin\mathcal{D}(f)$.

Για παράδειγμα η $f(x)=\dfrac{1}{x}/\mathbb{R}^*$, $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}$ και $f''(x)>0\ \ \forall x>0$,

ΑΣΥΜΠΤΩΤΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

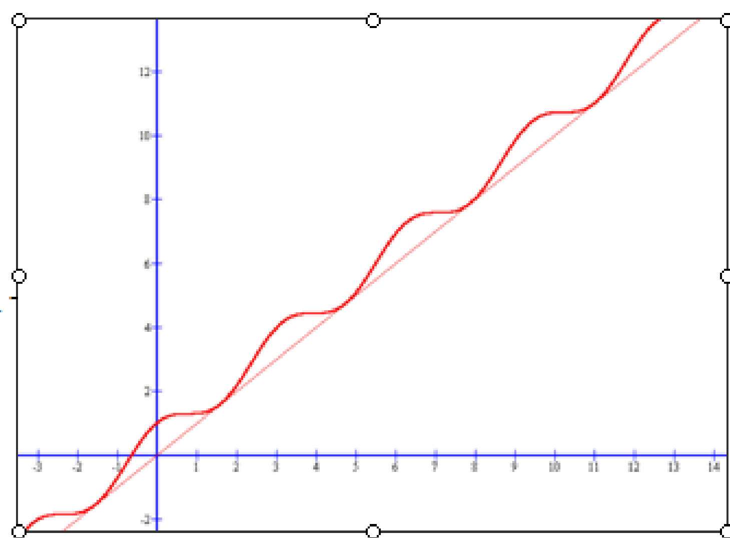
Να αποδειχθεί, ότι είναι δυνατόν να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}\in\mathbb{R}$, αλλά η $f(x)$ να μην έχει πλάγια ασύμπτωτη.

<u>*Απάντηση:*</u> Αν $f(x)=x+συν^2x/\mathbb{R}$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+συν^2x}{x}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{συν^2x}{x}\right)==\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1+συν2x}{2x}\right)=\lim_{x\to+\infty}1$$

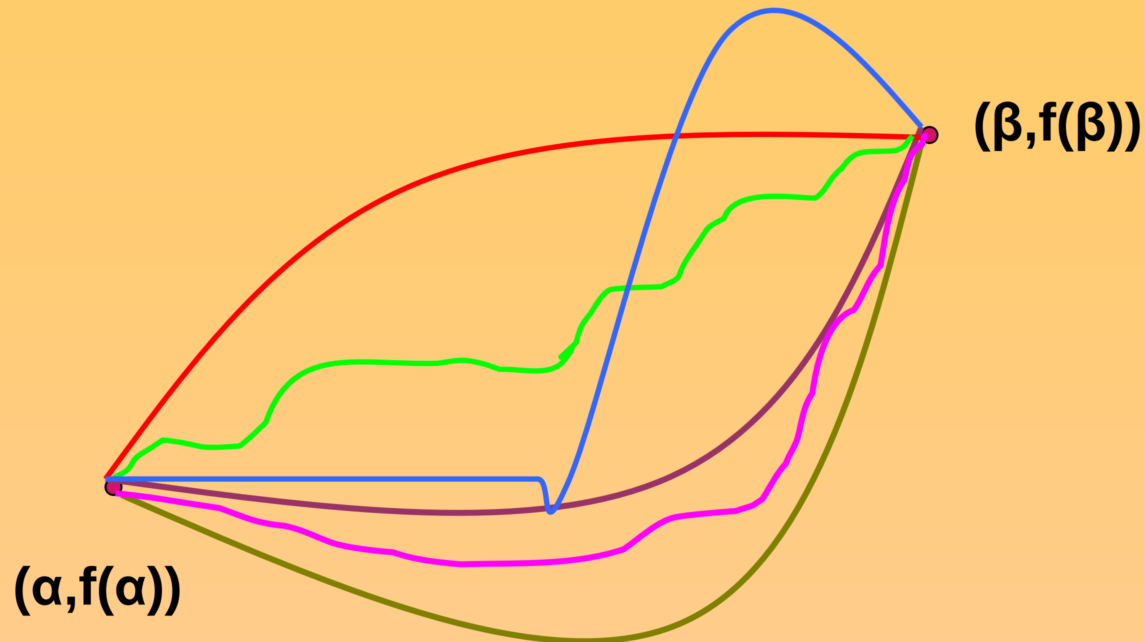
$$=1+0+0=1$$



Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}συν^2x$. Το τελευταίο όριο δεν υπάρχει, διότι αν θεωρήσω $x_n=2n\pi\to+\infty$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty}συν^2x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}συν^2 2n\pi=\lim\limits_{n\to+\infty}1^2=1$, ενώ αν

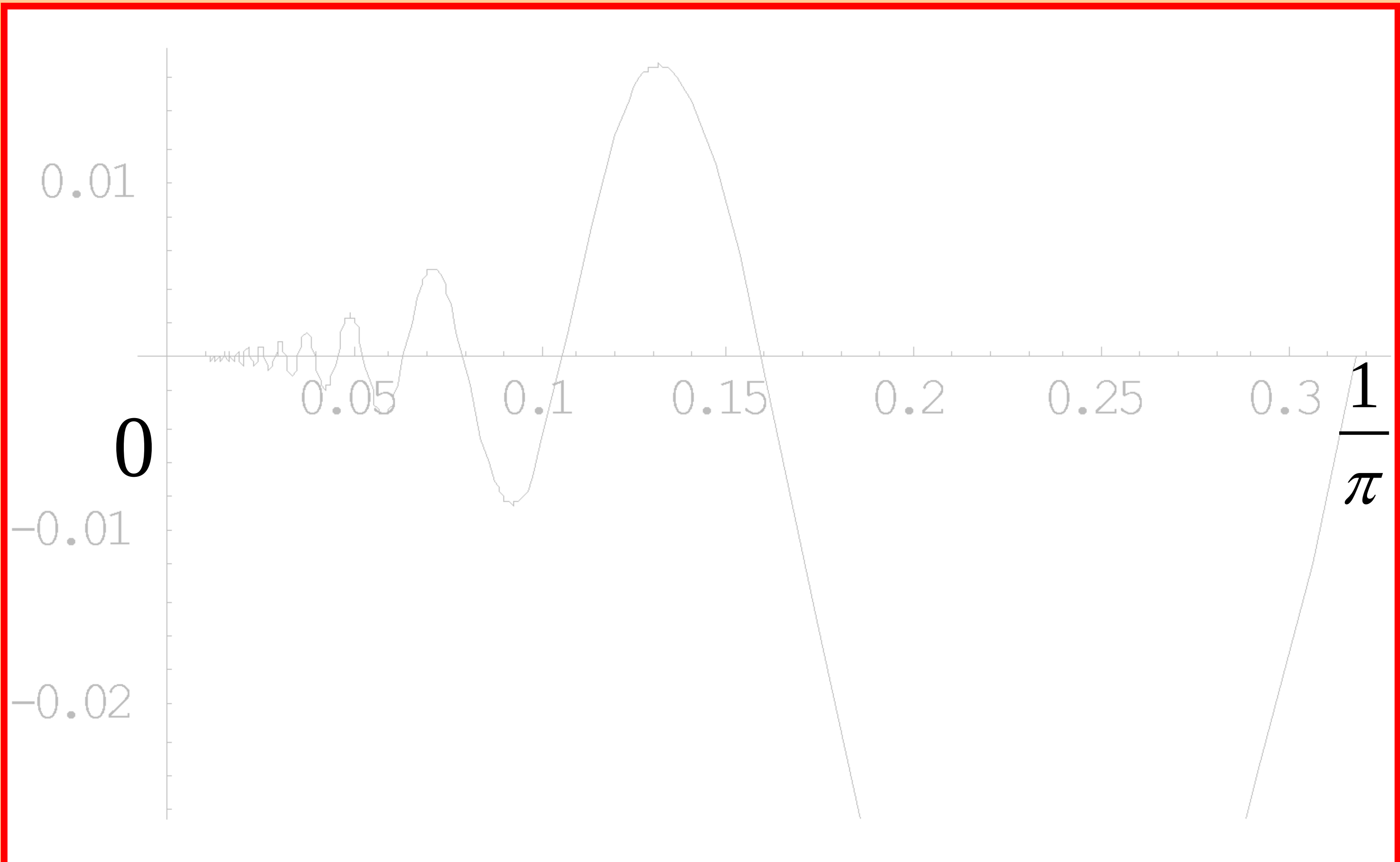
$y_n=2n\pi+\dfrac{\pi}{2}\to+\infty$, τότε $\lim\limits_{n\to+\infty}συν^2y_n=\lim\limits_{n\to+\infty}0=0$. Δηλ. στο $+\infty$ η συνάρτηση συνx², κυμαίνεται συνεχώς μεταξύ του 1 και του 0, χωρίς να πλησιάζει πουθενά.

Έστω συνάρτηση f :[α,β]→R συνεχής. Τότε το α είναι θέση τοπικού ακροτάτου



<u>Γεωμετρική –εποπτική προσέγγιση</u>: **Οσοδήποτε κοντά στο α , ή η f θα σχεδιάζεται: ή προς τα πάνω (άρα θα έχω τοπικό ελάχιστο) ή προς τα κάτω (άρα θα έχω τοπικό μέγιστο) ή θα σχεδιάζεται οριζόντια , άρα πάλι (υπό την ευρεία έννοια) θα έχω ακρότατο**

$$f:[0,\frac{1}{\pi}]\to\mathbb{R}\ ,\ \mu\varepsilon\ \ f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x}, & x>0\\ 0, & x=0\end{cases}$$



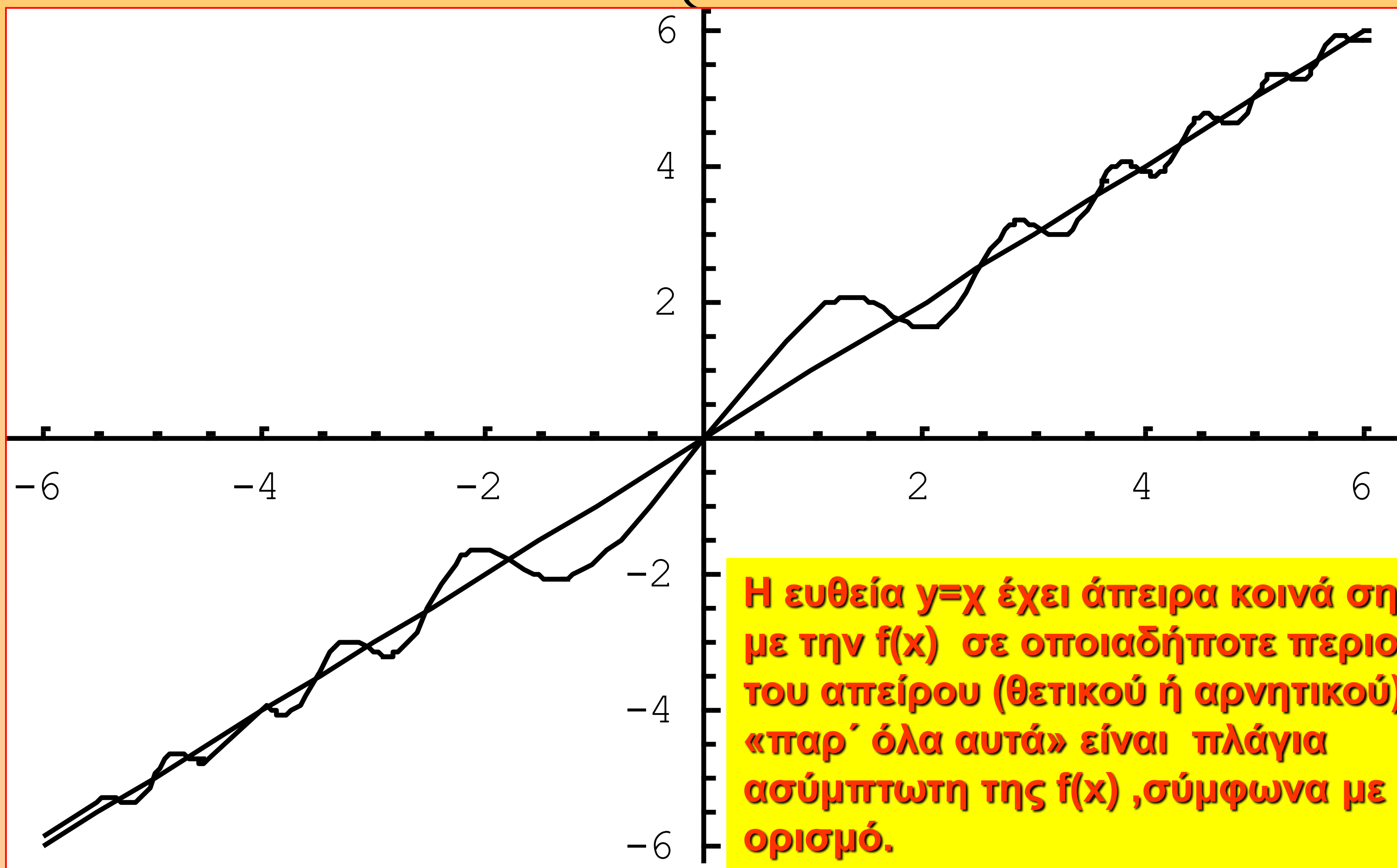
Η έννοια της ασύμπτωτης ευθείας σε συνάρτηση και τα προβλήματά της

$$\lim_{x \to +\infty}[f(x) - (\lambda x + \mu)] = 0$$

Η συνήθης μετάφραση –γεωμετρική ερμηνεία της παραπάνω συνθήκης του ορισμού, βοηθούσης και της ετυμολογίας της ίδιας της λέξης «ασύμπτωτη» (:=η μη συμπίπτουσα)

1. Η ευθεία και η συνάρτηση σε μια περιοχή του απείρου,
2. $(M\ ,\ +\infty)$ από ένα Μ>0 και πάνω δεν έχουν κοινά σημεία.
3. Η ευθεία «τελικά» εφάπτεται με την f(x) στο $+\infty$
4. Το γράφημα της f(x) , γίνεται «τελικά» στο άπειρο συμπτώσιμο με την ευθεία.

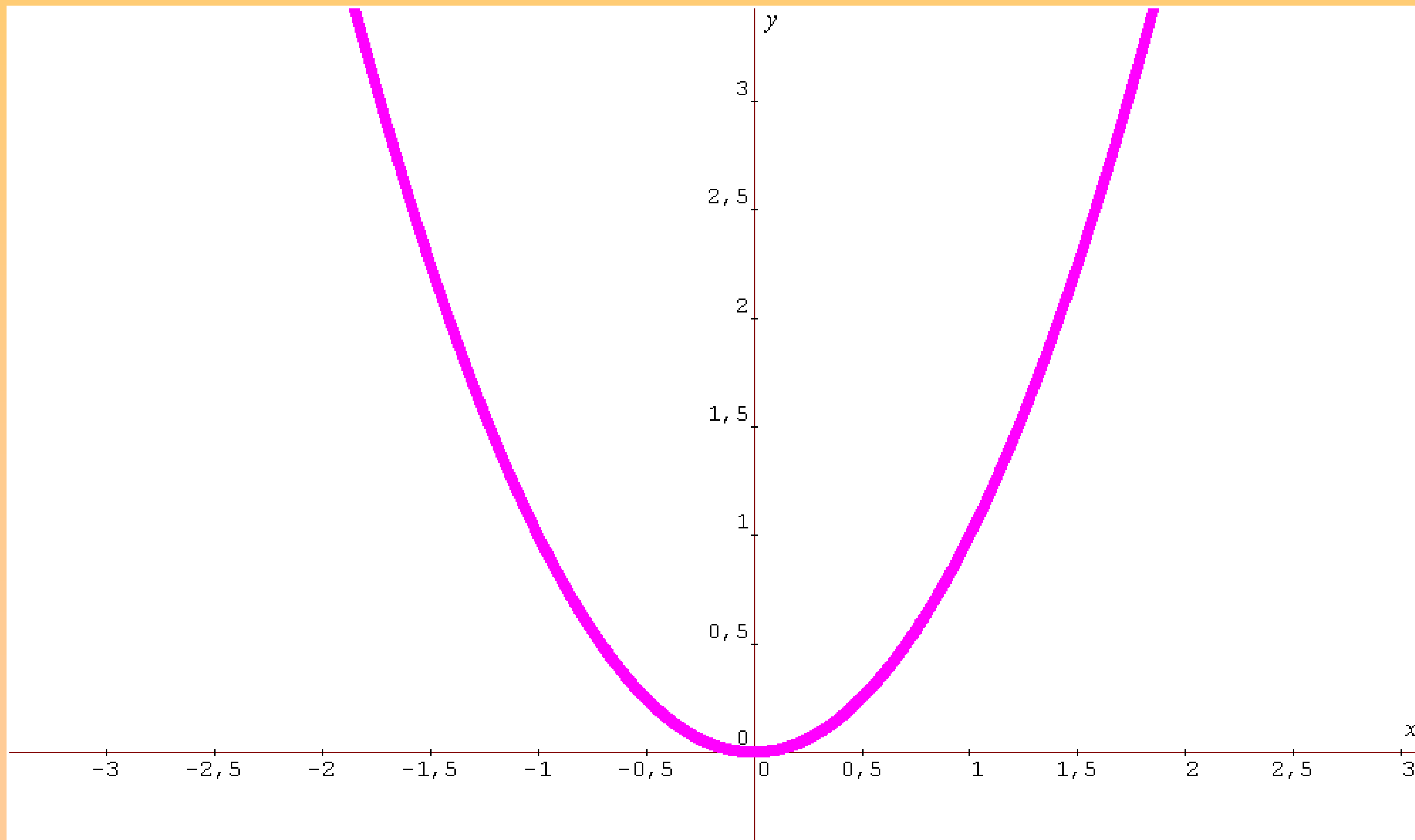
$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ \ f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{x}\sin x^2 & \alpha\nu\ \ x\neq 0 \\ 0 & \alpha\nu\ \ x=0 \end{cases}$$



Η ευθεία y=χ έχει άπειρα κοινά σημεία με την f(x) σε οποιαδήποτε περιοχή του απείρου (θετικού ή αρνητικού) και «παρ΄ όλα αυτά» είναι πλάγια ασύμπτωτη της f(x) ,σύμφωνα με τον ορισμό.

• **πλάνη_1** : ***«οι συνεχείς συναρτήσεις σχεδιάζονται με μονοκονδυλιά στο πεδίο ορισμού τους»***

•**Αντιπαράδειγμα_1**:η φ : R→R με φ(χ)= χ2 έχει **άπειρο μήκος** και δεν σχεδιάζεται με «μονοκονδυλιά»

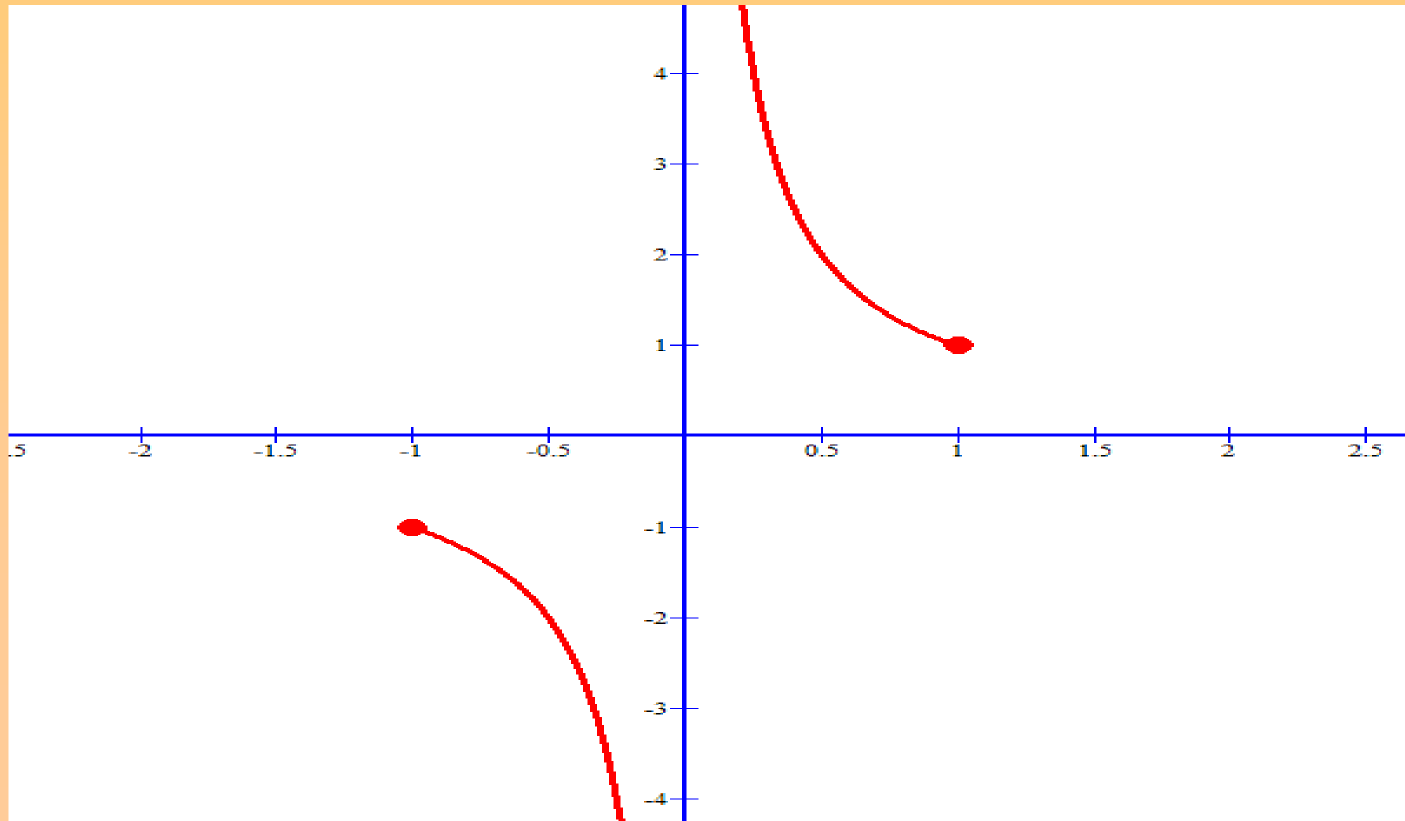


•Αναδιατύπωση της πλάνης_2: ***«κάθε συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού σύνολο πεπερασμένου μήκους (:=μέτρου) γράφεται με μονοκονδυλιά»)***

Αντιπαράδειγμα_2 :

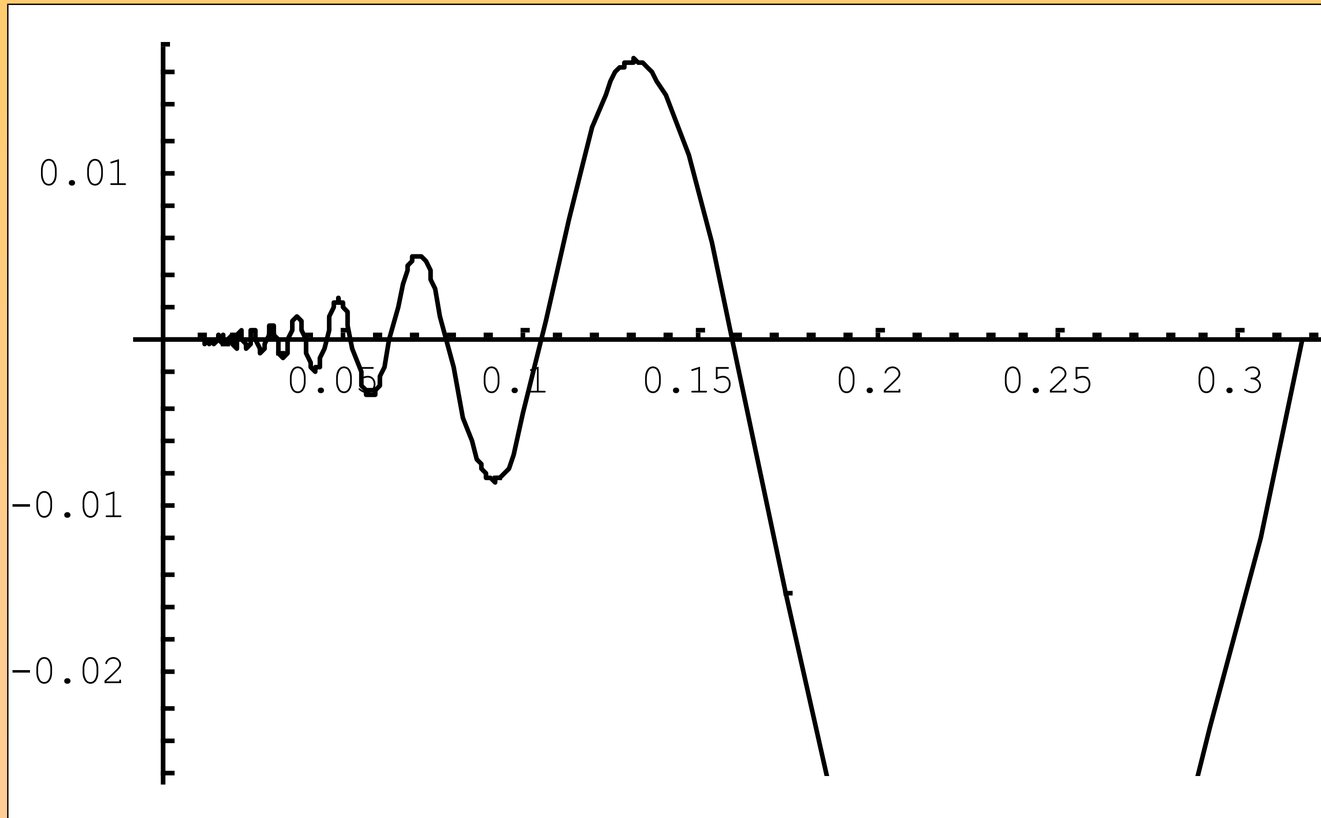
Έστω: $f:[-1,0)\cup(0,1]\to\mathbb{R}\ \mu\varepsilon\ f(x)=\dfrac{1}{x}$

με μ([-1,+1])=2 όπου η *f* είναι συνεχής σε κάθε σημείο του πεδίου ορισμού της , όμως στο 0 παρουσιάζει ***«άπειρο πήδημα»*** και άρα δεν μπορεί να γραφεί με μονοκονδυλιά.



Νέα αναδιατύπωση πλάνης _3 : «κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα, γράφεται με μονοκονδυλιά»

Αντιπαράδειγμα _3 : $f:[0,\dfrac{1}{\pi}]\rightarrow \mathbb{R}$ **με** $f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x}, & x>0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$



Δεν γράφεται με μονοκονδυλιά , αφού έχει άπειρο μήκος (η συγκεκριμένη) ή θα μπορούσε να έχει πεπερασμένο μεν, αλλά με άπειρη ταλάντωση . Επομένως, δεν μπορεί να την σχεδιάσει ικανοποιητικά , ούτε άνθρωπος ούτε Η/Υ

Έσχατη αναδιατύπωση 4 **«Κάθε συνεχής συνάρτηση ορισμένη σε κλειστό διάστημα, έχει «μονοκόμματο» (:=συνεκτικό) γράφημα**

Αντιπαράδειγμα: **Δεν υπάρχει! Είναι σωστή η πρόταση………**

Εν τούτοις υπάρχει κάτι περίεργο που διαφοροποιεί την διαισθητική (εξωμαθηματική) έννοια της

«συνάρτησης που σχεδιάζεται με μονοκονδυλιά»

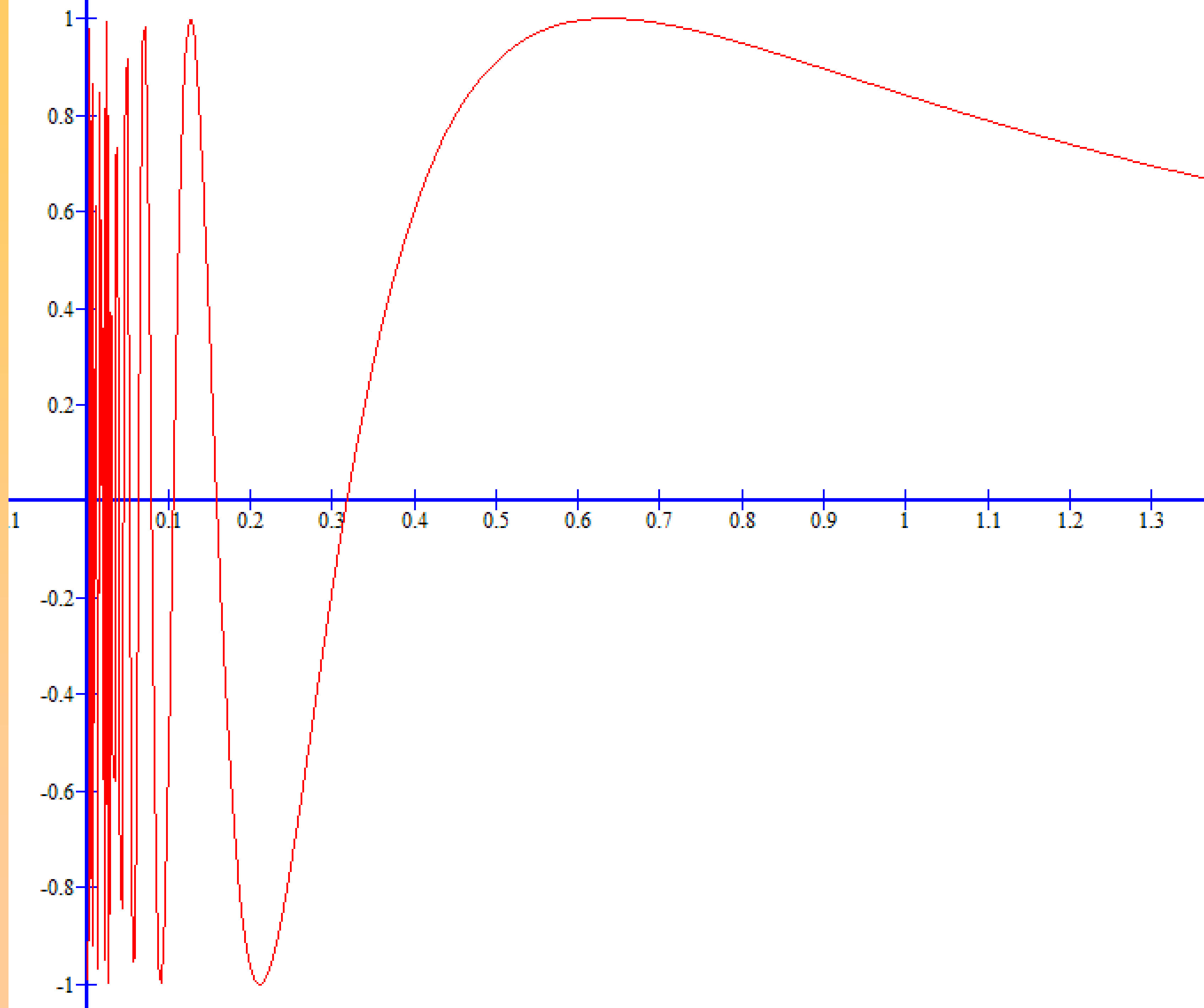
με την έννοια της

«συνάρτησης που έχει συνεκτικό -μονοκόμματο γράφημα»

Κάθε συνάρτηση που έχει συνεκτικό γράφημα σε διάστημα, δεν σημαίνει ότι είναι και συνεχής σε αυτό»

Παράδειγμα:

$$f:[0,1]\to R \;\; \mu\varepsilon \;\; f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} & \alpha\nu \;\; x\neq 0 \\ 0 & \alpha\nu \;\; x=0 \end{cases}$$



1
0.8
0.6
0.4
0.2
-0.2
-0.4
-0.6
-0.8
-1
.1
0.1
0.2
0.3
0.4
0.5
0.6
0.7
0.8
0.9
1
1.1
1.2
1.3

Ο ποντικοφαγωμένος χάρτης του θησαυρού!



Ο Κώστας Χρυσαφίδης, είχε μεγάλη μανία με τα μαθηματικά αλλά και με την αποθησαύριση. Απεβίωσε και στην διαθήκη του, άφησε ένα χάρτη όπου υποδεικνύει το μέρος ενός θαμμένου θησαυρού. Όμως, καθώς βρέθηκε ο χάρτης σε ένα παλιό σεντούκι, ήταν σχεδόν κατά το μεγαλύτερο μέρος του κατεστραμμένος από ποντικούς. Ένας παλιός φίλος του αποβιώσαντος που έτυχε να έχει δει τον χάρτη, θυμόταν τα εξής:

1. Ο χάρτης είχε τέσσερα γεωμετρικά σχήματα στις τέσσερις γωνίες του.
2. Πάνω αριστερά ήταν ένας κύκλος. **(Σ1)**
3. Πάνω δεξιά ήταν ένα ορθογώνιο τρίγωνο , του οποίου υπήρχε η διάμεσος επί την υποτείνουσα η ΑΜ , ($A=90^0$) η οποία έχει διασωθεί. **(Σ2)**
4. Κάτω δεξιά, ήταν ένα τετράγωνο, του οποίου έχει διασωθεί η μία πλευρά , η ΔΕ **(Σ3)**
5. Κάτω αριστερά, ήταν ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΗΘΙ ($H=90^0$) **(Σ4)**

Καθώς ήταν ολοκληρωμένα τα σχήματα, πέντε σημεία όριζαν ένα πεντάγωνο. Αυτά ήταν:

i) Το κέντρο του κύκλου στο (Σ1) (πρώτο σημείο)

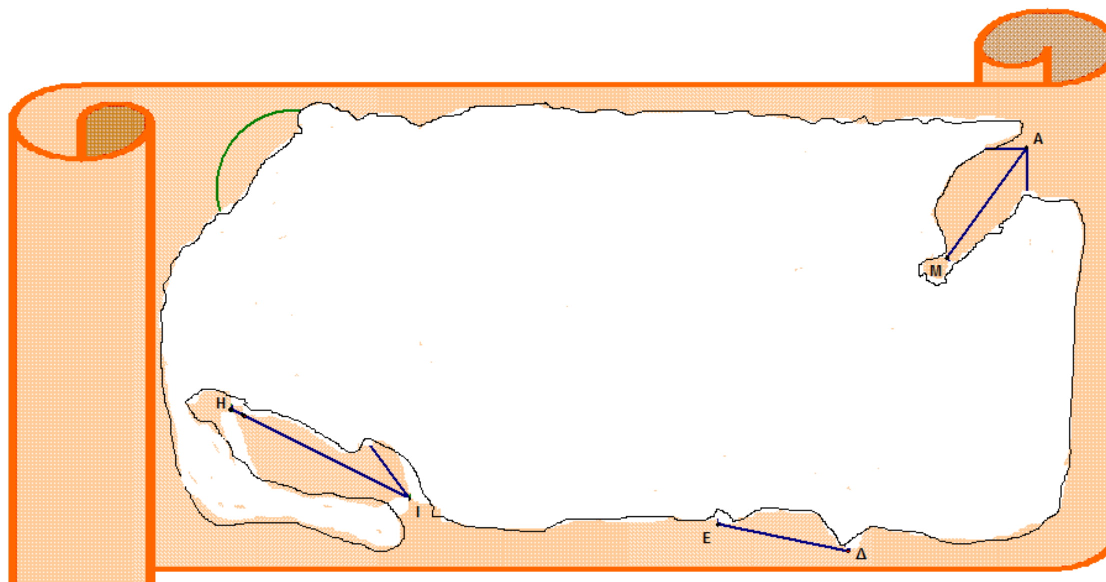
ii) Οι δύο κορυφές των οξειών γωνιών του ορθογωνίου τριγώνου στο (Σ2)(δεύτερο και τρίτο σημεία)

iii) Το κέντρο του τετραγώνου του (Σ3) (τέταρτο σημείο)

iv) Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου στο ορθογώνιο τρίγωνο ΗΘΙ (πέμπτο σημείο)

Στο μέσον την μεγαλύτερης διαγωνίου του πενταγώνου, υπάρχει θαμμένος ο θησαυρός.

Μπορείτε να προσδιορίσετε το σημείο του θησαυρού επί χάρτου;



<u>**Τάξη για την οποία προτείνεται η δραστηριότητα**</u>:
Α΄Λυκείου

<u>**Προαπαιτούμενες γνώσεις:**</u>

«Η διάμεσος επί την υποτείνουσα ορθογωνίου τριγώνου, ισούται με το μισό της» , «το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου σε ορθογώνιο τρίγωνο βρίσκεται στο μέσον της υποτείνουσας» . Η χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου ευθυγράμμου τμήματος. Ένας μαθητής , μπορεί να χρησιμοποιήσει και πρότερες των παραπάνω γνώσεις (με την έννοια της διαδοχής στο σχολικό Βιβλίο) λ.χ. την πρόταση « Αν από το μέσον μιας πλευράς

ενός τριγώνου φέρω παράλληλη προς μία βάση του, τότε αυτή θα διέλθει από το μέσον της τρίτης πλευράς»
Πάντως, σε κάθε περίπτωση, πρέπει να έχει γίνει διδασκαλία των απλών γεωμετρικών κατασκευών με κανόνα και διαβήτη.
Επίσης , θα πρέπει οι μαθητές να έχουν ήδη εξοικειωθεί με το λογισμικό και να μπορούν να χειρίζονται ανέτως τα εργαλεία κατασκευών.

Προτεινόμενο λογισμικό:

Sketchpad (το Cabri δεν επιδέχεται επικόλληση εικόνας)

Σχεδιασμός της δραστηριότητας:

Στους μαθητές που είναι μοιρασμένοι σε ομάδες των τριών , δίνεται (σε κάθε έναν) μία σελίδα με την εκφώνηση και το σχήμα , ενώ την έχουν και στην επιφάνεια εργασίας με την μορφή του εγγράφου κειμένου.
Πρέπει να γνωρίζουν ότι υπάρχει δυνατότητα αντιγραφής και επικόλλησης του σχήματος στο sketcpad, άλλως τους υποδεικνύεται. Επίσης τους εφιστάται η προσοχή να μην παραμορφώσουν «μονόπλευρα» το σχήμα τους (μόνο διαγωνίως επιτρέπεται μεγέθυνση σμίκρυνση. Πάντως η εικόνα , ηλεκτρονικά είναι σχεδιασμένη για να χωρά ακριβώς σε μια οθόνη με την συνήθη ανάλυση, αν και η «συνήθης ανάλυση οθόνης» δεν είναι πάντα ίδια για όλους.
Μπορούν να δουλεύουν την ανάλυση προβλήματος πάνω στο χαρτί και να υλοποιούν την κατασκευή στο περιβάλλον του λογισμικού.
Ο διδάσκων μπορεί να κάνει τις κατάλληλες διδακτικές του νύξεις αν δει ότι δεν προχωρεί η κατασκευή
Ουσιαστικά οι επί μέρους κατασκευές είναι τέσσερις . Η μία αφορά την εύρεση του κέντρου του κύκλου και η οποία θα μπορούσε να έχει διδαχθεί με τον παραδοσιακό τρόπο και να επανυλοποιηθεί επί περιβάλλοντος λογισμικού. Καλή είναι η επανάληψη.
Άλλη κατασκευή αφορά τετράγωνο και θα μπορούσε κάποιος να την υλοποιήσει με την κατασκευή από τα προσαρτημένα εργαλεία έτοιμης κατασκευής τετραγώνου. Και αυτό πρέπει να θεωρηθεί δεκτό.
Ένα καλό που έχει η κατασκευή σχημάτων στο sketchpad, είναι ότι οι κατασκευές αφήνουν «ηλεκτρονικά ίχνη» δηλ. Με επιλογή αντικειμένου –δεξί κλικ-ιδιότητες, παίρνω όλη την ιστορία της κατασκευής (ή και με επιλογή «εμφάνιση των κρυφών») και συνεπώς δύο ευθείες που φαίνονται κάθετες, διαπιστώνεται αν έχουν κατασκευασθεί κάθετες ή «με το μάτι» Εμμέσως , αυτό διαπιστώνεται και με την δυναμική συμπεριφορά του σχήματος, αλλά υποτίθεται δεν μπορούμε «να χαλάσουμε» με σύρσιμο μια κατασκευή των μαθητών…

Μια διαφαινόμενη αντίφαση της δραστηριότητας:

Όπως θα διαπιστώσει αμέσως ο κάθε μαθηματικός, η συγκεκριμένη δραστηριότητα, δεν εκμεταλλεύεται ούτε στο ελάχιστο τον δυναμικό χαρακτήρα του εργαλείου και άρα πρόκειται για δραστηριότητα, η οποία κάλλιστα θα μπορούσε να υλοποιηθεί με τον παραδοσιακό τρόπο με μολύβι και χαρτί και πιθανώς καλύτερα. Προς τι λοιπόν η δραστηριότητα με το συγκεκριμένο λογισμικό αν δεν εκμεταλλεύεται τις δυνατότητές του;

Η απάντηση:

1. Δεν είναι προφανές ότι το εργαλείο υπερκαλύπτει το «χαρτί και το μολύβι» (Ιδίως στην συνείδηση μεγαλωμένων προσώπων χωρίς λογισμικά . Και οι μαθητές μας, τέτοια πρόσωπα είναι, αφού δεν έχουν μπει τα εργαλεία αυτά ακόμα εκτεταμένα στην διδακτική πράξη και δεν θα μπουν ουσιαστικά-δυστυχώς- αν δεν μπουν και στην –όποια- «εξέταση» και βεβαίως αν δεν τα χειρίζονται ανέτως οι ενήλικοι καθηγητές τους, έχοντας πεισθεί εκ παραλλήλου και για την συνακόλουθη διδακτική στάση που προϋποθέτει και ο χαρακτήρας του συγκεκριμένου λογισμικού)
2. Η μεγαλύτερη διαγώνιος, στην πραγματικότητα, ελάχιστα διαφέρει από την αμέσως μικρότερη. Δημιουργείται αμφιβολία περί το αποτέλεσμα, αφού κατά πρώτον, όλοι θα βρουν διαφορετικά μήκη «μεγαλυτέρας διαγωνίου». Οι γραμμές μας έχουν ικανό πλάτος, το

λογισμικό λειτουργεί με προσεγγίσεις εμφάνισης στις μετρήσεις του το εκατοστό της όποιας μονάδας (προεπιλογή) το που θα πάρουμε κάποια σημεία δεν είναι απολύτως σαφές και επιδέχεται σφάλματος. Η μεγάλη κλίμακα του χάρτη (ας πούμε 1: 1.000) πολλαπλασιάζει το σφάλμα επί πραγματικού εδάφους επί 1.000 . Με ελαφρύ δυναμικό χειρισμό των σχημάτων (στα όρια πάχους των γραμμών) και αφού ενεργοποιηθεί η επιλογή σχεδίαση ίχνους για το μέσον της μεγαλυτέρας διαγωνίου , μπορούμε να πάρουμε μια περιοχή του χάρτη, όπου μέσα της είμαστε σίγουροι ότι υπάρχει ο θησαυρός! Κάποιος θα μπορούσε να πει να πάρουμε την μέση τιμή των μετρήσεων των μαθητών και με κέντρο την τιμή αυτή και ακτίνα την μεγαλύτερη ευρεθείσα απόκλιση από την τιμή αυτή να φτιάξω ένα κύκλο, εντός του οποίου να σκάψουμε. Πόσο ακριβές μπορεί να είναι αυτό; Το σημείο του θησαυρού , δυναμικά , μπορεί να μεταβάλλεται περισσότερο σε μια διεύθυνση και λιγότερο σε άλλη. Γιατί να είναι κύκλος η πιθανή περιοχή σκαψίματος και όχι μια άλλη τυχαία που καθορίζεται από την σχεδίαση ίχνους του μέσου σημείου της διαγωνίου ;
Τα τελευταία ερωτήματα βεβαίως δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν εντός μιας διδακτικής ώρας και μπορούν να ανατεθούν –ίσως- ως μια εργασία «κατ΄οίκον[1]» αλλά και ανά ομάδες .

[1] Μάλιστα (θα το προέτεινε κάποιος στο αμέσως προσεχές μέλλον) θα μπορούσε αυτή η «κατ΄οίκον» ομαδική εργασία (ή η όποια άλλη) να διεξάγεται μέσω «messenger» , όπου ήδη υπάρχει επικοινωνία ζωντανή μέσω κάμερας (το 1976 που ο πρόεδρος των ΗΠΑ και της ΕΣΣΔ συνομίλησαν με έναν πρωτόγονο παρεμφερή τρόπο, αυτό θεωρήθηκε μέγιστη συμβολή στην ειρήνη , την συνεργασία στην κατανόηση κτλ) παράλληλα, εκτός από την κάμερα με ήχο, υπάρχει δυνατότητα κοινής χρήσης της επιφάνειας εργασίας και ορισμένων εφαρμογών (Ζωγραφική) και ταχεία ανταλλαγή αρχείων (τα μεγέθη των αρχείων των λογισμικών και σε σχέση με τις ταχύτητες στο διαδίκτυο πρακτικά είναι …ανύπαρκτα!)
Το κόστος είναι το εξής:

- 600€ για τον καλύτερο φορητό του κόσμου με κάμερα κτλ (της προηγούμενης διετίας μεν, αλλά και τώρα , κάνει πολύ καλά την δουλειά του. Αυτός που κάνει τώρα 2.400€ σε δύο χρόνια που θα αλλάξω τον δικό μου θα κάνει πάλι 600€)
- Το κόστος σύνδεσης ADSL σε μέγιστη οικιακή ταχύτητα πρόσβασης που είναι περίπου 30€ /μήνα , αλλά με όλα τα πλεονεκτήματα που γνωρίζουμε όλοι.

Δραστηριότητες με το Sketchpad
(Ο σύνδεσμος για το αρχείο .gsp ΕΔΩ)

Δίδονται δύο σημεία O_1 και O_2, που απέχουν απόσταση 2 α . Να βρεθεί ο Γ.Τ. των σημείων Μ: $(MO_1)(MO_2)=\alpha^2$. (Λημνίσκος του Μπερνούλι)

1. *Κυλιόμενος κύκλος*

   Στον κυλιόμενο κύκλο επί ευθείας, να φέρετε ένα ευθ. τμήμα που να έχει αρχή το κέντρο του κύκλου και τέλος ένα σημείο έξω από τον κύκλο. Καθώς κυλίεται ο κύκλος, ένα σημείο του τμήματος είναι μέσα στον κύκλο, επί του κύκλου ή έξω από τον κύκλο, διαγράφοντας τρεις διαφορετικούς Γ.Τ. Να τους βρείτε (Απλωμένη, οξεία ή αναδιπλούμενη κυκλοειδής.)

2. ***Τετραγωνισμός κυλιόμενου κύκλου***

   Πώς μπορεί να τετραγωνιστεί ένας κυλιόμενος κύκλος; (σε μια περιστροφή διανύει διάστημα 2πR και εμείς θέλουμε χ: $\chi^2=\pi R^2$)

3. ***Ένας ορισμός της έλλειψης,***

   Έίναι ο εξής: «Έστω κύκλος (Ο,ρ) και σημείο Β εντός του κύκλου. Τότε ο γ.τ. των σημείων Μ: (ΜΒ) = δ , όπου δ η απόσταση του Μ από τον κύκλο, λέγεται έλλειψη με διευθετούντα κύκλο (Ο,ρ) και μία Εστία το Β (η άλλη είναι το Ο)

4. ***Επικυκλοειδής και υποκυκλοειδής.***

   Κύκλος κυλίεται επί κύκλου και ένα σημείο του παράγει την επί-κυκλοειδή. Κύκλος κυλίεται μέσα σε κύκλο (υπό τον κύκλο) και παράγει την υποκυκλοειδή.

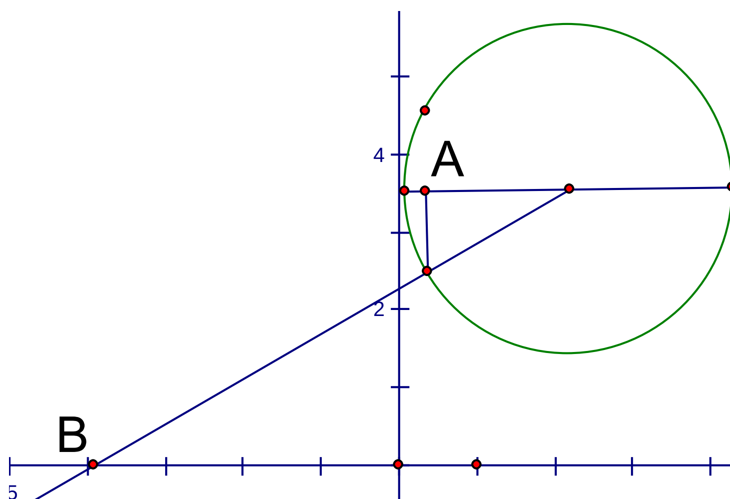
5. ***Μεταβλητή που να διατρέχει όλο το $\mathbb{R}$, με διάτρεξη ενός μικρού (ανοικτού) διαστήματος***

   Θέλουμε, μια μεταβλητή να μεταβάλλεται σε ένα μικρό ευθύγραμμο τμήμα , όμως να διαγράφει όλο το $\mathbb{R}$. Αυτό, είναι ένα κατασκευαστικό πρόβλημα . εκμεταλλευόμενος την τοπολογική ομοιότητα του $\mathbb{R}$ με οποιοδήποτε ανοικτό διάστημα , φτιάχνω την παρακάτω κατασκευή –βοηθητικό εργαλείο. Σχεδιάζω τους άξονες. Λαμβάνω ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο με τον χχ΄. Βρίσκω το μέσον του, κατασκευάζω τον κύκλο με διάμετρο το τμήμα και δουλεύω με το κάτω ημικύκλιο. Θεωρώ τυχαίο σημείο Α επί του ευθυγράμμου τμήματος. Το προβάλω στο ημικύκλιο και μέσω του κέντρου του κύκλου, το προβάλω στην χχ΄, στο Β. Καθώς το σημείο Α διαγράφει το τμήμα (το ανοικτό) η τελική του αντιστοίχιση το Β, διαγράφει το $\mathbb{R}$.

   ως Η τετμημένη του Β είναι η μεταβλητή μου, που διατρέχει το $\mathbb{R}$. Θεωρώντας ως c την τετμημένη του Β, να κατασκευάσετε τις μονοπαραμετρικής εξισώσεις καμπυλών :

   $$(x-c)^2+y^2=4$$
   $$c(x-1)+(y-2)=0$$
   $$y=2cx-c^2$$

   Για κάθε κατασκευή να σχεδιάσετε το ίχνος του κύκλου της πρώτης περίπτωσης και των ευθειών της δεύτερης.



6. **Η ευθειοποίηση .**
   Σταθερό σημείο Ρ είναι εντός γωνίας χΟψ. Να αναζητηθούν σημεία Α και Β επί των Οχ και Οψ, έτσι ώστε το τρίγωνο ΡΑΒ να είναι ελαχίστης περιμέτρου. [1]
7. **Η Αντιστροφή ως προς κύκλο .**
   Μια απεικόνιση ονομάζεται γενικά **αντιστροφή** *(ο τόνος σε λήγουσα)* όταν είναι αντιστρέψιμη και ταυτίζεται με την αντίστροφή της. Η αξονική συμμετρία και η κεντρική συμμετρία είναι δύο παραδείγματα αντιστροφών. Υπάρχει μια κλασική αντιστροφή , η **«αντιστροφή ως προς κύκλο»** , η οποία δημιουργείται ως εξής: Έστω κύκλος (Μ,ρ) και Ρ σημείο εκτός του κύκλου. Η εικόνα του Ρ βρίσκεται , αν από το Ρ φέρω μία εφαπτόμενη στον κύκλο. Στο ορθογώνιο τρίγωνο που ορίζεται με υποτείνουσα την ΜΡ και κάθετες την ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής και στο εφαπτόμενο τμήμα , προβάλω την κορυφή της ορθής στην υποτείνουσα το Ρ΄ που είναι η εικόνα του Ρ. Ισχύει (ΡΜ)(ΜΡ΄)=ρ^2. Αντιστρόφως, το Ρ΄ , απεικονίζεται στο Ρ.

Χρησιμοποιώντας την απόκρυψη, φτιάξτε μια δυναμική κατασκευή που να έχει τον κύκλο αντιστροφής και τα δύο σημεία (αρχέτυπο , εικόνα) Για να μην είναι «μισή» η κατασκευή, θα πρέπει, κάθε εξωτερικό σημείο του κύκλου να απεικονίζεται σε εσωτερικό, ΑΛΛΑ και κάθε εσωτερικό σε εξωτερικό σημείο. Η Αντιστροφή έχεις ιδιότητες που πρέπει να δείτε:

α) Είναι απεικόνιση (γιατί;) 1-1 και επί του $\mathbb{R}^2 - \{M\} \to \mathbb{R}^2 - \{M\}$

β) Τα σημεία του κύκλου αντιστροφής είναι τα μόνα σταθερά σημεία της αντιστροφής («Σταθερά» εννοούμε, τα σημεία του επιπέδου *Χ :* $X \equiv f(X)$

γ) Μια ευθεία που δεν διέρχεται από το Μ, απεικονίζεται σε κύκλο που διέρχεται από το Μ.

δ) ένας κύκλος **που διέρχεται** από το Μ (χωρίς το Μ) απεικονίζεται σε ευθεία.

ε) ένας κύκλος που **δεν** διέρχεται από το Μ, απεικονίζεται σε κύκλο, που επίσης δεν διέρχεται από το Μ.

στ) Οι ευθείες που διέρχονται από το Μ (χωρίς το Μ) απεικονίζονται στον εαυτό τους.

ζ) Κάθε κύκλος που τέμνει ορθογώνια τον κύκλο αντιστροφής, απεικονίζεται στον εαυτό του.

Η αντιστροφή, κρύβεται πίσω από το καθημερινό γεγονός της απεικόνισης ευθύγραμμων αντικειμένων σε κοίλα ή κυρά κάτοπτρα. Επίσης μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε μια δύσκολη κατασκευή (περίπτωση) του Απολλωνείου προβλήματος. (Κατασκευή που εφάπτεται σε δύο δοθέντες και διέρχεται από δοθέν σημείο.)

Να διερευνήσετε την εικόνα ενός τριγώνου(Εσωτερικό τριγώνου, σημείο που κινείται στην περίμετρο του τριγώνου, κατασκευή τόπου)

8. **Η έλιξ του Αρχιμήδους.**
   Φανταστείτε έναν κύκλο στον οποίο εφάπτεται μια ευθεία. στο σημείο επαφής ορίζεται μια ακτίνα του κύκλου. Αυτή η ακτίνα, **συνδέεται αναπόσπαστα** με το σημείο επαφής. Αρχίζει η ευθεία να κυλίεται επί του κύκλου. Τότε το άκρο της ακτίνας που ήταν πάνω στο κέντρο του κύκλου, διαγράφει μια καμπύλη, που λέγεται «έλιξ του Αρχιμήδους» ή σπείρα του Αρχιμήδη . Να δημιουργήσετε την κατασκευή.

---

1. [1] (Η εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας με συμμετρία ως προς άξονες ως οριακής θέσης)

<u>Εναλλακτική κατασκευή:</u> Έχω έναν κύκλο (Ο,ρ) και ημιευθεία Οχ. Σημείο Μ, αρχίζει να κινείται από το Ο πάνω στην ημιευθεία Οχ, ενώ ταυτοχρόνως η ημιευθεία περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα . τότε το Μ, ορίζει Αρχιμήδεια έλικα.

9. Καμπυλότητα καμπύλης και ενειλιγμένη καμπύλης

Σε κάθε σημείο μιας καμπύλης, υπάρχει η διαισθητική έννοια της καμπυλότητας, η οποία χρειάζεται κάποιο αυστηρό ορισμό. Η έννοια της καμπυλότητας λοιπόν σε ένα σημείο $A(\chi_0,f(\chi_0))$ συνάρτησης (για να το περιορίσουμε, αλλά χωρίς να χαλάσουμε την γενίκευση) έχει να κάνει με το να θεωρήσω στο Α, έναν κύκλο που να εφάπτεται στην καμπύλη και να έχει την ίδια πρώτη παράγωγο όπως και την ίδια δεύτερη παράγωγο με την καμπύλη στο Α . Επειδή ο κύκλος δεν είναι συνάρτηση, μπορώ να θεωρώ στο Α κατάλληλο περιορισμό που να δείχνει το τμήμα του κύκλου που χρειάζεται για να έχει νόημα η επαφή. Με το να βρω το κέντρο του κύκλου Κ, τότε η ΚΑ θα είναι η ακτίνα ρ και το 1/ρ, είναι ένα μέτρο της καμπυλότητας (χρησιμοποιείται στην κατασκευή στροφών στην οδοποιία) Αν λυθεί ένα σύστημα 3 εξισώσεων ($\kappa(\chi_0)=f(x_0)$, $\kappa'(\chi_0)=f'(x_0)$, $\kappa''(\chi_0)=f''(x_0)$) τότε για κάθε (x, f(x)) , καθορίζονται οι άγνωστες συντεταγμένες του κέντρου όπως και η ακτίνα.
αν το σημείο είναι το (x, f(x)) τότε το κέντρο είναι το Ο(ξ,η) , με:

$$\xi = x - f'(x)\cdot\frac{1+(f'(x))^2}{f''(x)}$$

$$\eta = f(x) + \frac{1+(f'(x))^2}{f''(x)}$$

Ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων λέγεται **ενειλιγμένη της καμπύλης** (εδώ συνάρτησης)

10. Τρεις κωνικές τομές σε ένα σχήμα

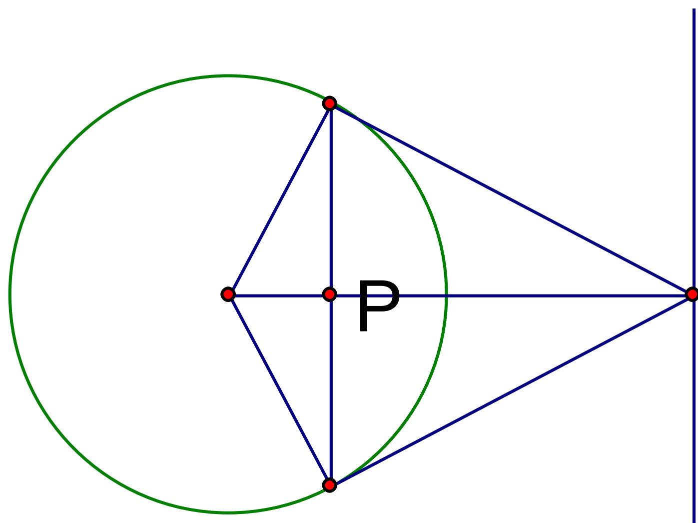
Οι τρεις κωνικές τομές, μπορούν να οριστούν και οι τρεις ως ο γ.τ. των σημείων : α) Για μεν την υπερβολή ως ο γ.τ. των σημείων που απέχουν από ευθεία και σημείο σταθερό λόγο ε<1 β) για την έλλειψη ως ο γ.τ. των σημείων που απέχουν από σημείο και ευθεία σταθερό λόγο ε=1 , γ) για την παραβολή ως ο γ.τ. των σημείων που απέχουν από ευθεία και σημείο σταθερό λόγο ε>1.

Να κατασκευαστεί ένα σχήμα, όπου να μπορούμε να κάνουμε δυναμικό χειρισμό των γ. τόπων , χωρίς την επιλογή σχεδίασης ίχνους.

Να κατασκευαστεί ένα σχήμα που να γίνονται επιλογές λόγου σε ένα ευθύγραμμο τμήμα και να σχεδιάζεται ο γ.τ. κάθε φορά (Υπάρχει ένα κώλυμα, θα το συζητήσουμε, αφού πρώτα το διαπιστώσουμε

11. Η πολικότητα

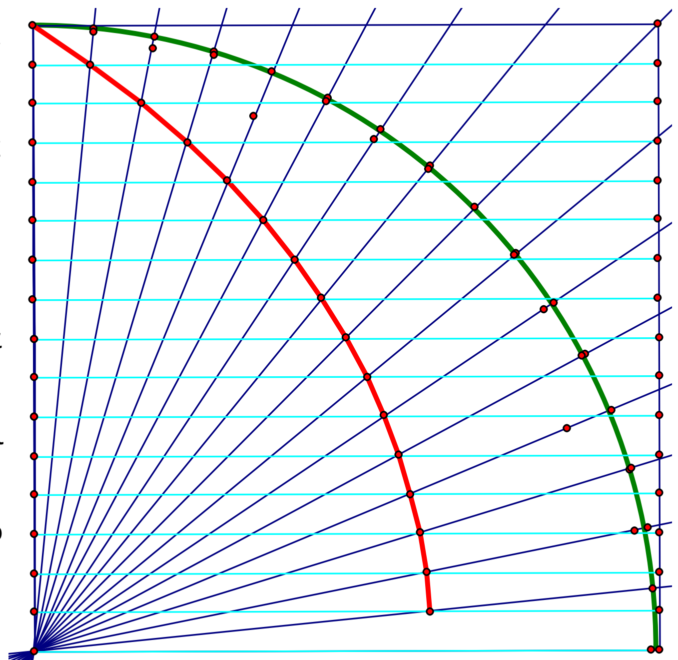
Πολικότητα είναι μια απεικόνιση σημείου σε ευθεία. μπορεί να οριστεί για όλες τις κωνικές τομές. Εδώ θα την ορίσουμε ως προς κύκλο. Αν έχω ένα σημείο P εκτός κύκλου και φέρω από το P προς τον κύκλο τις δύο εφαπτόμενες, με A και B τα σημεία επαφής, τότε η ευθεία AB είναι η πολική του P ως προς τον κύκλο. Αν το P είναι σημείο του κύκλου, τότε η πολική του, είναι η εφαπτόμενη του κύκλου στο P. Αν το P είναι σημείο εντός του κύκλου, τότε η πολική ορίζεται ορίζεται κατασκευαστικά όπως φαίνεται στο σχήμα.



Τα σημεία μιας ευθείας (ε) , απεικονίζονται σε δέσμη ευθειών με κοινό σημείο το B. Το B, απεικονίζεται στην (ε)

Συγχωνεύστε το P σε κύκλο και βρείτε το γ.τ. των ευθειών καθώς το P κινείται στον κύκλο. (είναι από τις πιο εντυπωσιακές εικόνες)

12. Η καμπύλη του Ιππία του Ηλείου (425 π.Χ.)



Η καμπύλη αυτή, έχει χρησιμοποιηθεί στην αρχαιότητα για τριχοτόμηση τυχαίας γωνίας και για τετραγωνισμό του κύκλου. Κατασκευάζεται ως εξής: (Βλέπε σχήμα) Μια ακτίνα , έχει γωνιακή ταχύτητα για να καλύψει το τεταρτοκύκλιο, τόση έτσι ώστε το σημείο που θα κατέβει την μία κατακόρυφη αριστερή πλευρά του τετραγώνου, να τερματίσουν μαζί. Το μεν σημείο τερματίζει στην κάτω αριστερή κορυφή του τετραγώνου και η ακτίνα στην κάτω πλευρά του τετραγώνου. Η καμπύλη, έχει σχεδιαστεί προσεγγιστικά στατικά με διαίρεση της πλευράς του τετραγώνου σε 16 ίσα τμήματα και του τεταρτοκυκλίου , ομοίως σε 16 ίσα τόξα. Η καμπύλη αυτή, ούσα γνωστή, τριχοτομεί οποιαδήποτε γωνία. την είχε χρησιμοποιήσει και ο Δεινόστρατος για τετραγωνισμό του κύκλου. Εσείς να την φτιάξετε με δυναμικό τρόπο και να ρυθμίσετε τις ταχύτητες να έχουν ανάλογη σχέση και να εξηγήσετε πώς γίνεται η τριχοτόμηση τυχούσας γωνίας.

Δραστηριότητες εκμάθησης του Sketchpad

1. Όλοι οι τρόποι κατασκευής κύκλου από κέντρο και ακτίνα
    1.1. Τυχαίος, με γνωστό κέντρο, από κέντρο και σημείο , με γνωστό ευθύγραμμο τμήμα ως ακτίνα, με γνωστό μήκος γνωστού ευθυγράμμου τμήματος , με οποιοδήποτε μήκος ως ακτίνα.
    1.2. Κατασκευή εσωτερικού κύκλου , μέτρηση ακτίνας, περιμέτρου, εμβαδού και δημιουργία εξίσωσης κύκλου.
    1.3. Μέτρηση μήκους τόξου, γωνίας τόξου πάνω σε κύκλο. Κατασκευή εσωτερικού τμήματος τόξου και τομέα τόξου. Δυναμικός χειρισμός.
    1.4. Μέτρηση μήκους ευθ. Τμήματος, κλίσης . Μέτρηση λόγου δύο τμημάτων.
    1.5. Κατασκευή γωνίας, μέτρηση γωνίας, κατασκευή διχοτόμου γωνίας.
2. Κατασκευή ισοπλεύρου τριγώνου και αποθήκευσή του ως έτοιμου εργαλείου. Επανάκτησή του.
3.
4.
5. Να κατασκευάσετε δύο ευθύγραμμα τμήματα χ και ψ, υποκείμενα σε δυναμικό χειρισμό, έτσι ώστε χ+ψ=ΑΒ , όπου ΑΒ δεδομένο σταθερό τμήμα.
6. Ομοίως, χ-ψ =σταθ. Χψ=σταθ. χ/ψ=σταθ.
7. Δίδονται δύο σημεία O_1 και O_2 .
    Α) Να βρεθεί ο Γ.Τ. των σημείων Μ για τα οποία ισχύει MO_1+MO_2=σταθ. (έλλειψη)
    Β) >> >> >> >> >> >> >> >> >> > > > > >> MO_1-MO_2=σταθ>0 . (Υπερβολή)
    Γ) >> >> >> >> >> >> >> >> >> > > > > >> MO_1/MO_2=σταθ. (Απολλώνιος κύκλος)
    Δ) >> >> >> >> >> >> >> >> >> > > > > >> MO_1*MO_2=σταθ. (καμπύλες Κασίνι)

Η άλγεβρα Banach ($M_{nxn}(C)$, $\|\cdot\|_\infty$)

Σε μια άλγεβρα Banach -B με μονάδα e, ισχύει το θεώρημα:
Αν $x \in B$ με $\|e - x\| < 1$ **τότε το x έχει αντίστροφο το** x^{-1} **και**

$$x^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(e-x)^n .$$

Αφού δείξετε ότι το σύνολο($M_{nxn}(C)$, $\|\cdot\|_\infty$) είναι άλγεβρα Banach με μονάδα, βρείτε με προσέγγιση, τον αντίστροφο του πίνακα $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix}$

Απάντηση:

Θα εκκινήσουμε με τους ορισμούς εννοιών της γραμμικής άλγεβρας:

1) ***διανυσματικός χώρος***
2) ***της άλγεβρας***
3) ***άλγεβρα Banach (Με επαγωγικό τρόπο)***

Ορισμός Διανυσματικού Χώρου

Έστω V σύνολο με $V \neq \varnothing$ και F σώμα . Θα ονομάζω *Διανυσματικό ή Γραμμικό χώρο γραμμικό χώρο* πάνω στο σώμα F, το ζεύγος (F,V) τέτοιο ώστε:

a) Το σύνολο V να είναι εφοδιασμένο με μια εσωτερική πράξη
$V \times V \longrightarrow V$ με $V \times V \ni (\alpha, \beta) \longrightarrow \alpha+\beta \in V$ που λέγεται πρόσθεση, τέτοια ώστε:

i) $\alpha+(\beta+\gamma)=(\alpha+\beta)+\gamma \ \forall \ \alpha,\beta,\gamma \in V$
ii) $\exists 0 \in V: \alpha+0=0+\alpha=\alpha \forall \alpha \in V$
iii) $\forall \alpha \in V \exists \alpha \in V: \alpha+(-\alpha)=(-\alpha)+\alpha=0$
iv) $\alpha+\beta=\beta+\alpha \ \forall \alpha,\beta \in V$

β) Το σύνολο V, είναι εφοδιασμένο με μια εξωτερική πράξη « .» :
$V \times V \longrightarrow V$ με $F \times V \ni (\lambda, \alpha) \longrightarrow \lambda\alpha \in V$ που λέγεται βαθμωτός πολλαπλασιασμός με τελεστές από το σώμα F, τέτοια ώστε:

i) $\lambda(\alpha+\beta)=\lambda\alpha+\lambda\beta \ \forall \alpha,\beta \in V$ και $\lambda \in F$
ii) $(\lambda+\mu)\alpha=\lambda\alpha+\mu\alpha \ \forall \alpha \in V$ και $\lambda,\mu \in F$
iii) $(\lambda\mu)\alpha=\lambda(\mu\alpha) \ \forall \alpha \in V$ και $\lambda, \mu \in F$
iv) $1\alpha=\alpha \ \forall \ \alpha \in V$

Ορισμός άλγεβρας

Έστω V:=(F ,V) ένας διανυσματικός χώρος πάνω από ένα σώμα F.Τότε ο διανυσματικός χώρος V λέγεται ***άλγεβρα*** (πάνω από το F), αν και μόνο αν είναι εφοδιασμένος με μια πράξη πολλαπλασιασμού «$\otimes$»V x V—>V με VXV $\ni$(α, β)—>α $\otimes$β $\in$V τέτοια ώστε:

i) $(\lambda\alpha)\otimes\beta=\lambda(\alpha\otimes\beta)=\alpha\otimes(\lambda\beta)$ $\quad\forall$ α, β$\in$V και λ $\in$F
ii) $(\alpha+\beta)\otimes\gamma=\alpha\otimes\gamma+\beta\otimes\gamma$ $\quad\forall$ α, β, γ $\in$V
iii) $\alpha\otimes(\beta+\gamma)=\alpha\otimes\beta+\alpha\otimes\gamma$ $\quad\forall$ α ,.β, γ $\in$V

Ορισμός της Norm

Αν V διανυσματικός χώρος, τότε μια απεικόνιση

$\|.\|:V\to\Re:\chi\to\|\chi\|$ καλείται norm στο V αν πληροί τις παρακάτω ιδιότητες:

- $\|x\|\geq 0\ \forall x\in V$ (θετικά ορισμένη)
- $\|x\|=0\Leftrightarrow x=0$
- $\|a\,x\|=|a|\,\|x\|$
- $\|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|$ (τριγωνική ανισότητα)

Για κάθε χ, ψ στο V

Ορισμός Μετρικού Χώρου

Αν X ένα σύνολο μη κενό, τότε μια απεικόνηση d : XxX→R θα λέγεται μετρική , αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες:

- $d(x,y)\geq 0$
- $d(x,y)=0\Leftrightarrow x=y$
- $d(x,y)=d(y,x)$
- $d(x,y)\leq d(x,z)+d(z,y)$

Το X εφοδιασμένο με την μετρική d , θα λέγεται μετρικός χώρος.

Ορισμός ακολουθίας Cauchy

Μια ακολουθία (α_ν) θα λέγεται ακολουθία Cauchy ή βασική ακολουθία, αν για κάθε ε>0 υπάρχει ν_0 φυσικός, τέτοιος ώστε $d(\alpha_\nu-\alpha_\mu)<\varepsilon$, για κάθε $\nu,\mu\geq\nu_0$

Ορισμός πλήρους Χώρου

Ένας μετρικός χώρος (X,d) είναι πλήρης, αν κάθε ακολουθία Cauchy συγκλίνει σε ένα στοιχείο του X.

Άλγεβρα Banach

Μία άλγεβρα V επί του σώματος C των μιγαδικών αριθμών, λέγεται άλγεβρα Banach αν και μονο αν :

i) Στον μιγαδικό διανυσματικό χώρο V , έχει ορισθεί μια norm $\|.\|$, τέτοια ώστε ο χώρος (V , $\|.\|$) να είναι χώρος με norm

ii) Οι πράξεις «+» και « ⊗ » του διανυσματικού χώρου V, να είναι συνεχείς ως προς την μετρική d(α,β)= $\|\alpha-\beta\|$ που εισάγεται με norm . Με τον τρόπο αυτό, ο χώρος (V , $\|.\|$) διατηρεί την αλγεβρική δομή της γραμμικότητας, καθώς και την αναλυτική μορφή της norm

iii) O norm χώρος (V , $\|.\|$) είναι χώρος Banach

iv) Ισχύει ότι , $\|\alpha\otimes\beta\| \le \|\alpha\|\,\|\beta\| \quad \forall\, \alpha,\beta \in V$

- Θεωρούμε το μη κενό σύνολο, $M_{nxn}(C)$ των nxn τετραγωνικών πινάκων, με στοιχεία στο C και πράξεις:
- «+» : $M_{nxn}(C)$ x $M_{nxn}(C)$ → $M_{nxn}(C)$ τη συνήθη πρόσθεση πινάκων.
- «.» : $M_{nxn}(C)$ x $M_{nxn}(C)$ → $M_{nxn}(C)$ τον συνήθη βαθμωτό πολλαπλασιασμό μιγαδικού αριθμού επί πίνακα.
- «∘» : $M_{nxn}(C)$ x $M_{nxn}(C)$ → $M_{nxn}(C)$ τον συνήθη πολλαπλασιασμό πινάκων.

Τότε το σύνολο $M_{nxn}(C)$ είναι διανυσματικός χώρος πάνω στο C

- Επί πλέον , γνωρίζουμε , ότι για κάθε πίνακα Α, Β, Γ, ∈ $M_{nxn}(C)$ και κάθε λ∈C ισχύει ότι:
  i)(λA)∘B=λ(A∘B)=A∘(λB)
  ii)(A+B) ∘Γ=A∘Γ+B∘Γ
  iii)A∘(B+Γ)=A∘B+A∘Γ

Άρα, ο διανυσματικός χώρος $M_{nxn}(C)$ είναι μια άλγεβρα , πάνω από το σώμα των μιγαδικών C

- Θεωρουμε την συνάρτηση $\|\ .\ \|_\infty : M_{nxn}(C) \to \Re$ τετοια ώστε για κάθε πίνακα Α ∈ $M_{nxn}(C)$ να ισχύει ότι :

$$\|A\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n}|\alpha_{i,j}|\} \qquad \text{όπου } A=[\alpha_{i,j}],\ \alpha\in C \text{ και } i,j=1,2,3,4,...n.$$

- Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $\|\ \ \|_\infty$ είναι norm

Έχω: Για κάθε Α,Β,Γ, ∈$M_{nxn}(C)$ και για κάθε λ ∈ C ισχύουν

1. $\| A \|_\infty = \max\limits_{1\le j\le n}\{\sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{i,j}|\} \ge 0$

2. $\| A \|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max\limits_{1\le j\le n}\{\sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{i,j}|\} = 0 \Leftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n}|\alpha_{i,j}| = 0 \quad \forall\ i = 1,2,3,4,...n \Leftrightarrow$

   $\alpha_{i,j} = 0\ \forall\ i, j = 1,2,3,4....n \Leftrightarrow A = O$

3. $\| \lambda A \|_\infty = 0 \Leftrightarrow \max\limits_{1\le j\le n}\{\sum\limits_{j=1}^{n} |\lambda\alpha_{i,j}|\} = \max\limits_{1\le j\le n}\{|\lambda| \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{i,j}|\} = |\lambda|[\max\limits_{1\le j\le n}\{\sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{i,j}|\}]$

   $=|\lambda|\,\|A\|_\infty$

4. $\|A+B\|_\infty = \max\limits_{i\le j\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|\alpha_{i,j}+\beta_{i,j}| \le \{\max\limits_{i\le j\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}|\alpha_{i,j}| + \max\limits_{i\le j\le n}\sum\limits_{j=1}^{n}\beta_{i,j}|\} =$

   $\max\limits_{i\le j\le n}\{\sum\limits_{j=1}^{n}|\alpha_{i,j}|\} + \max\limits_{i\le j\le n}\{\sum\limits_{j=1}^{n}|\alpha_{i,j}+\beta_{i,j}|\} = \|A\|_\infty + \|B\|_\infty$

Άρα η συνάρτηση $\| \cdot \|_\infty$ είναι norm και ο χώρος ($M_{nxn}(C)$, $\| \cdot \|_\infty$) είναι ένας χώρος με norm

Επίσης, από την συναρτησιακή ανάλυση είναι γνωστό ότι αν έχω (X, $\| \cdot \|_\infty$) ένα γραμμικό χώρο με norm , τότε οι πράξεις :
«+» : XxX→X και «.» : RxX→X του γραμμικού χώρου , είναι συνεχείς συναρτήσεις, ως προς την μετρική που καθορίζεται από την norm $\| \cdot \|_\infty$.
επομένως , οι πράξεις «+» και «$\circ$» του νορμαρισμένου γραμμικού χώρου ($M_{nxn}(C)$, $\| \cdot \|_\infty$) είναι συνεχείς ως προς την μετρική που καθορίζεται από την

$\| A \|_\infty = \max\limits_{1\le j\le n}\{\sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{i,j}|\} \ge 0$

~~Θ~~α δείξουμε ότι ο χώρος ($M_{nxn}(C)$, $\| \cdot \|_\infty$) είναι άλγεβρα Banach.
Δηλαδή θα δείξουμε ότι $\|A \circ B\|_\infty \le \|A\|_\infty \|B\|_\infty \quad \forall\ A \in (M_{nxn}(C)$ με $A=[\alpha_{i,j}]$, α $\in C$

$$\|A \circ B\|_\infty = \max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{\iota,1}\beta_{1,j} + \alpha_{\iota,2}\beta_{2,j} + \dots + \alpha_{\iota n}\beta_{nj}|\}$$

$$\le \max_{1\le i\le n}\{|\alpha_{\iota,1}|\sum_{j=1}^{n}\beta_{1,j}| + |\alpha_{\iota,2}|\sum_{j=1}^{n} |\beta_{2,j}| + \dots + |\alpha_{\iota n}|\sum_{j=1}^{n} |\beta_{nj}|\}$$

$$\le \max_{1\le i\le n}\{|\alpha_{\iota,1}|\max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n}\beta_{1,j}|\} + |\alpha_{\iota,2}|\max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n} |\beta_{2,j}|\} + \dots + |\alpha_{\iota n}|\max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n} |\beta_{nj}|\}\}$$

$$\le \max_{1\le i\le n}\{\max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n}\beta_{1,j}|\}(|\alpha_{\iota,1}| + |\alpha_{\iota,2}| \dots + |\alpha_{\iota,n}|)\}$$

$$= \max_{1\le i\le n}\{[\max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n}\beta_{1,j}|\}]\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{\iota,1}|\}$$

$$= [\max_{1\le i\le n}\{\sum_{j=1}^{n}\beta_{1,j}|\}][\max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^{n} |\alpha_{\iota,1}|\}]$$

$$= \|B\|_\infty \|A\|_\infty = \|A\|_\infty \|B\|_\infty$$

Άρα $\|A \circ B\|_\infty = \|A\|_\infty \|B\|_\infty$ δηλαδή ο norm χώρος ($M_{nxn}(C)$, $\| \ . \ \|_\infty$) είναι άλγεβρα Banach και τον συνήθη μοναδιαίο πίνακα I_n

Θεωρούμε τον πίνακα $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 0.9 \end{pmatrix}$ για τον οποίον ισχύει ότι

$$\|I_2 - A\| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0.1 & 0.9 \end{matrix}\right\| = |-0.1| + |0.1| = 0.2 < 1$$

Εκπληρούνται δηλαδή οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος.
Άρα ο Α αντιστρέφεται και ο A^{-1} δίνεται από τον τύπο:

$$A^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(I_2 - A)^n = (I_2 - A)^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.1 & 0.1 \end{pmatrix}^n$$

Επομένως πρέπει και αρκεί να υπολογίσουμε την ν-οστή δύναμη του προηγούμενου πίνακα.

Έχω : $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.1 & 0.1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.1 & 0.1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.01 & 0.01 \end{pmatrix}$

Επίσης $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.1 & 0.1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.01 & 0.01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.001 & 0.001 \end{pmatrix}$

Εικάζω ότι $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.01 & 0.01 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{10^{n}} & \frac{1}{10^{n}} \end{pmatrix} \quad \forall n \in \aleph$ **(1)**

Πράγματι, η (1) ισχύει ήδη για n=1, 2 και 3 , ενώ πρέπει και αρκεί να αποδείξω την ισχύ της με την μέθοδο της Μαθηματικής ή τελείας επαγωγής.

Κατά τα γνωστά υποθέτω την ισχύ της (1) για n=k και θα δείξω την ισχύ της για n=k+1

Δηλ.:

Ισχύει $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.01 & 0.01 \end{pmatrix}^{\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{10^{\kappa}} & \frac{1}{10^{\kappa}} \end{pmatrix}$ **(2)**

Και θα δείξω: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.01 & 0.01 \end{pmatrix}^{\kappa+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{10^{\kappa+1}} & \frac{1}{10^{\kappa+1}} \end{pmatrix}$ **(3)**

Πράγματι, εάν πολλαπλασιάσω και τα δύο μέλη της (1) αριστερά με Α , θα έχω:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.01 & 0.01 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.01 & 0.01 \end{pmatrix}^{\kappa} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.01 & 0.01 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{10^{\kappa}} & \frac{1}{10^{\kappa}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.01 & 0.01 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{10^{\kappa}} & \frac{1}{10^{\kappa}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{10^{\kappa+1}} & \frac{1}{10^{\kappa+1}} \end{pmatrix} \Leftrightarrow (2)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.01 & 0.01 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{10^{\kappa+1}} & \frac{1}{10^{\kappa+1}} \end{pmatrix} \qquad \text{που είναι η αποδεικτέα (3)}$$

Άρα η (1) ισχύει όντως για κάθε φυσικό.

Τότε λοιπόν θα έχω:

$$A^{-1} = I_2 + \sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0.1 & 0.1 \end{pmatrix}^{n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-1}{10^{n}} & \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{n}} \end{pmatrix} = I_2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} =$$

$$0\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{-1}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{9} & \frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

Χρησιμοποιήσαμε ότι το άθροισμα των απείρων όρων φθίνουσας Γεωμετρικής προόδου με λόγο 1/10 και πρώτο όρο το 1/10 , δίνεται

από τον τύπο $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^{n}}=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}}=\frac{1}{9}$

Έτσι έχομε ότι

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{9} & \frac{10}{9} \end{pmatrix}$$

Ορισμένες αποδείξεις ότι 0.9999…..=1 και «το γιατί» του εκπλήσσοντος αποτελέσματος.

Γιάννης Π. Πλατάρος

plataros@gmail.com

Περίληψη: Η ισότητα 0,999…=1 είναι αντικείμενο συζητήσεων στο διαδίκτυο, μεταξύ φοιτητών και όχι μόνον. Αυτή η ισότητα αμφισβητείται πεισματικά. Ακόμα και συγκεκριμένες μαθηματικές αποδείξεις, δεν πείθουν. Διαφαίνεται, ότι η δυσκολία στην διαισθητική κατανόηση του απείρου, δείχνει τα όρια της πεπερασμένης φύσης του ανθρώπου ενώ παράλληλα, αναδεικνύεται η δύναμη και η πρακτική αξία των μαθηματικών αποδείξεων.

Εισαγωγή: Το αποτέλεσμα ότι 0.9999….=1, [1],[2],[3] όσες αποδείξεις και να παραθέσουμε, δεν γίνεται κατανοητό-πλήρως αποδεκτό από την ανθρώπινη πεπερασμένη διάσταση που νομίζει ότι κατανοεί και το άπειρο, όσο κι αν κατανοεί τα μαθηματικά εργαλεία της λογικής και της απόδειξης . Προτείνω να παρακολουθήσουμε τις αποδείξεις και στο τέλος θα επιχειρήσουμε διείσδυση, ενώ υποσχόμεθα πλήρη κατανόηση, αν και στις «διαισθητικές εξηγήσεις» που είναι «κόντρα» στην «λογική» δείχνουν να δυστροπούν και πάρα πολλοί μαθηματικοί!



Απόδειξη 1: Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε, ότι $\frac{1}{9}=0.111111111...$

Οπότε $1=9\cdot\frac{1}{9}=9\cdot 0,111111....=0,99999999......$

Απόδειξη 2 : Ομοίως γνωρίζουμε ότι $\frac{1}{3}=0,33333.....$ Οπότε $1=3\cdot\frac{1}{3}=3\cdot 0,33333.....=0,99999.....$

1/3 = 0.333333...   2/3 = 0.666666... Επομένως   1/3 + 2/3 = .999999... = 1.

$$\frac{1}{11} = .09090909\ldots \qquad \frac{2}{7} = .285714285714\ldots$$

$$+\ \frac{10}{11} = .90909090\ldots \qquad +\ \frac{5}{7} = .714285714285\ldots$$

$$\frac{11}{11} = .99999999\ldots \quad ή \quad \frac{7}{7} = .999999999999\ldots$$

Απόδειξη 3: Έστω ότι χ=0,999999….. (1) τότε

10χ=9,999999999……. (2)

Αν αφαιρέσω κατά μέλη στο σχήμα (2)-(1) θα έχω:

10χ-χ =9,9999999999999…..-0,9999999999……. Δηλ.

9χ=9,0000000000……… Ήτοι 9χ=9 και τελικά χ=$\frac{9}{9}=1$.

Πιο κομψά 10χ=9,999…=9+0,999…=9+χ, όπερ χ=1.

Απόδειξη 4 : 0,99999999999999999999……….=

$$\frac{9}{10}+\frac{9}{100}+\frac{9}{1.000}+\frac{9}{10.000}+\frac{9}{100.000}+\frac{9}{1.000.000}+\ldots=$$

$$\frac{9}{10^1}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\frac{9}{10^6}+\ldots=$$

(Άθροισμα απείρων όρων φθίνουσας Γεωμετρικής Προόδου με λόγο $\frac{1}{10}$,

$$\Sigma=\frac{\alpha}{1-\lambda} \Rightarrow \Sigma=\frac{\frac{9}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{\frac{9}{10}}{\frac{9}{10}}=1$$

Απόδειξη 5.

$$0,999\ldots=\lim_{\nu\to\infty}\underbrace{0,99\ldots9}_{\nu\,εννιάρια}=\lim_{\nu\to\infty}\sum_{\kappa=1}^{\nu}\frac{9}{10^{\kappa}}=\lim_{\nu\to\infty}\left(1-\frac{1}{10^{\nu}}\right)=1-\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{10^{\nu}}=1-0=1$$

(Ιδια με την 4, με λίγο αυστηρότερη ορολογία)

Απόδειξη 6.

$$0,\overline{9}=0,\overline{9} \Leftrightarrow 9\cdot 0,\overline{9}=9\cdot 0,\overline{9} \Leftrightarrow 9\cdot 0,\overline{9}=(10-1)\cdot 0,\overline{9} \Leftrightarrow$$
$$9\cdot 0,\overline{9}=9,\overline{9}-0,\overline{9} \Leftrightarrow 9\cdot 0,\overline{9}=9 \Leftrightarrow 0,\overline{9}=1$$

Και αυτή η ιδέα μια αναδιάταξη και διαφοροποιημένη παρουσίαση προηγούμενων αποδείξεων είναι.

Απόδειξη 7

$$\left(\frac{1}{3}\right)_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta 10)}=0,1_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta 3)} \Leftrightarrow$$
$$3_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta 10)}\bullet\left(\frac{1}{3}\right)_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta 10)}=10_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta 3)}\bullet 0,1_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta 3)} \Leftrightarrow$$
$$3_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta 10)}\bullet 0,33333\ldots_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta 10)}=1_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta 3)} \Leftrightarrow$$
$$0,999999\ldots\ldots_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta 10)}=1_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta 3)}$$
$$0,999999\ldots\ldots_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta 10)}=1_{(\beta\acute{\alpha}\sigma\eta 10)} \qquad \acute{o}.\acute{\varepsilon}.\delta.$$

$(O\iota\ \mu o\nu\acute{\alpha}\delta\varepsilon\varsigma\ \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota\ \acute{\iota}\sigma\varepsilon\varsigma\ \sigma\varepsilon\ \acute{o}\lambda\varepsilon\varsigma\ \tau\iota\varsigma\ \beta\acute{\alpha}\sigma\varepsilon\iota\varsigma\ \alpha\rho\acute{\iota}\theta\mu\eta\sigma\eta\varsigma.)$

Απόδειξη 8: Η ακολουθία διαστημάτων $\mathrm{I}_\nu=[0.\underbrace{9\ldots.9}_{\nu\ \varepsilon\nu\nu\iota\acute{\alpha}\rho\iota\alpha},1]\ \ \nu\in\mathbb{N}$ είναι μια ακολουθία διαστημάτων για τα οποία ισχύει



(i) $\mathrm{I}_1\supset\mathrm{I}_2\supset\mathrm{I}_3\supset\mathrm{I}_4\supset\ldots..$ (ii) $\bigcap_{\nu=1}^{\infty}\mathrm{I}_\nu\neq\varnothing$ διότι μεταξύ δύο ρητών πάντα υπάρχει ενδιάμεσος (λ.χ. ο μέσος όρος τους $\frac{\alpha+\beta}{2}$)

(iii) $\lim_{\nu\to\infty}|0.\underbrace{9\ldots.9}_{\nu\ \varepsilon\nu\nu\iota\acute{\alpha}\rho\iota\alpha}-1|=0$, διότι η διαφορά ισούται με $0,\underbrace{0\ldots..0}_{\nu\ \mu\eta\delta\varepsilon\nu\iota\kappa\acute{\alpha}}1<\varepsilon$, για κάθε ε>0, για κάθε $\nu>\nu_0(\varepsilon)$, αρκεί κάθε φορά να επιλέγουμε ως $\nu_0(\varepsilon)$ το πλήθος των μηδενικών ψηφίων που υπάρχουν μετά την υποδιαστολή μέχρι το πρώτο μη μηδενικό, της δεκαδικής αναπαράσταση του ε, προσαυξημένο κατά 1, οσοδήποτε μικρό και να είναι το ε.

Σύμφωνα με την αρχή του κιβωτισμού η τομή περιέχει μοναδικό αριθμό . Αυτός προφανώς είναι το 1. Αλλά και ο 0,9999…..(μη πεπερασμένα εννιάρια

) περιέχεται σε κάθε σύνολο της ακολουθίας και για κάθε $\nu \in \mathbb{N}$. Άρα 1=0,99999999999999…

Απόδειξη 9. Αν α=1 και β=0,99999… , τότε $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1,999999....}{2} = 0,99999..... = \beta$ και όταν $\frac{\alpha+\beta}{2} = \beta \Leftrightarrow \frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2} \Leftrightarrow \alpha = \beta$

Απόδειξη 10. *(Βασισμένη στην προηγούμενη ιδέα)*

Λήμμα: Αν *|α-β|<ε για κάθε ε>0, τότε α=β.*

Απόδειξη λήμματος: Έστω ότι $\alpha \neq \beta$. Τότε $|\alpha-\beta| = \varepsilon^* \neq 0$

Τότε λ.χ. για $\varepsilon = \frac{\varepsilon^*}{2}$ έχουμε $\varepsilon^* < \frac{\varepsilon^*}{2}$ *,άτοπο. Άρα α=β .*

Η απόδειξη συμπληρώνεται με την διαπίστωση ότι η διαφορά 1-0.9999… γίνεται οσοδήποτε μικρή.*(Βλέπε απόδειξη 8.)*

Απόδειξη 11: Αν αποδείξουμε ότι (0,999…)·(0,999…)=1 , τότε προφανώς 0,999…=1 Πράγματι, (0,999…) ·(0,999…)=

$$\left(\frac{9}{10^1}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\frac{9}{10^6}+...\right)\cdot\left(\frac{9}{10^1}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\frac{9}{10^4}+\frac{9}{10^5}+\frac{9}{10^6}+...\right)=$$

$$\frac{9}{10^1}\left(\frac{9}{10^1}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}++...\right)+\frac{9}{10^2}\left(\frac{9}{10^1}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+...\right)+\frac{9}{10^3}\left(\frac{9}{10^1}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+...\right)+...=$$

$$\left(\frac{81}{10^2}+\frac{81}{10^3}+\frac{81}{10^4}+...\right)+\left(\frac{81}{10^3}+\frac{81}{10^4}+\frac{81}{10^5}+...\right)+\left(\frac{81}{10^4}+\frac{81}{10^5}+\frac{81}{10^6}+...\right)+...=$$

$$\frac{81}{10^2}\left(1+\frac{1}{10^1}+\frac{1}{10^2}+...\right)+\frac{81}{10^3}\left(1+\frac{1}{10^1}+\frac{1}{10^2}+...\right)+\frac{81}{10^4}\left(1+\frac{1}{10^1}+\frac{1}{10^2}+...\right)=$$

$$\frac{81}{10^2}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}+\frac{81}{10^3}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}+\frac{81}{10^4}\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}+...=$$

$$\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}\right)\cdot\frac{81}{10^2}\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}\right)=\left(\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{1}{10^\nu}\right)\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2=$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{10}}\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2=\left(\frac{10}{9}\right)^2\cdot\left(\frac{9}{10}\right)^2=1 \text{ ό.έ.δ.}$$

Απόδειξη 12: Έστω ότι 0,999…<1 . Τότε υπάρχει ε>0: 0,999…+ε=1. Θεωρούμε τον αριθμό $ε^* \leq$ ε, ο οποίος προκύπτει κατασκευαστικά από τον ε, όπου λαμβάνουμε το πρώτο μη μηδενικό ψηφίο του ε ως 1 και τα υπόλοιπα όλα 0.

Τότε

$$0,999\ldots+\varepsilon^*=0,999\ldots+0,\underbrace{000...000}_{\nu\psi\eta\varphi\iota\alpha}1000....=1,\underbrace{000...000}_{(\nu+1)\psi\eta\varphi\acute{\iota}\alpha}999....>1\acute{\alpha}\tau o\pi o.$$

Διότι προσθέσαμε στον 0,999… τον $ε^* \leq$ ε και βρήκαμε αποτέλεσμα μείζον του 1 ενώ θα έπρεπε να βγει μικρότερο ή ίσο του 1.

Απόδειξη 13. Έχουμε :

$$0,999....+0,999....=(0,9+0,09+0,009+...)+(0,9+0,09+0,009+...)=$$
$$(0,9+0,9)+(0,09+0,09)+(0,009+0,009)+...=$$
$$1,8+0,18+0,018+...=(1+0,8)+(0,1+0,08)+(0,01+0,008)+...=$$

$$1+(0,8+0,1)+(0,08)+0,01)+(0,008+0,001)+...=$$
$$1+0.9+0.09+0.009+...=1+0,999....$$

Άρα με διαγραφή του 0,999… και στα δύο μέλη αρχικού και τελικού μέλους ισότητας, λαμβάνουμε 1=0,999…

Απόδειξη 14: $\chi=0,999...\Leftrightarrow\chi=0,9+0,0999....\Leftrightarrow\chi=0,9+\frac{0,999...}{10}\Leftrightarrow$

$$\chi=0,9+\frac{\chi}{10}\Leftrightarrow\frac{9}{10}\chi=0,9\Leftrightarrow\chi=1$$

Απόδειξη 15 : Σύμφωνα με την μέθοδο της εξάντλησης του Αρχιμήδους που παρουσιάζεται στο βιβλίο 13 των Στοιχείων του Ευκλείδους, που είναι ένα κριτήριο σύγκλησης, εάν από ένα μέγεθος αφαιρέσουμε μέγεθος, όχι μικρότερο του ημίσεός του, από το εναπομένον, όχι μικρότερο του ημίσεος του και κ.ο.κ. το τελικά εναπομένον, γίνεται οσοδήποτε μικρό.

Δηλ. 1-0,9=0,1 $\rightarrow$ 0,1-0,09=0,01 $\rightarrow$ 0,01-0,009=0,001 κ.ο.κ.

Για την οσοδήποτε μικρή διαφορά έχουμε (βλέπε και απόδειξη 10) έχουμε τελικά εξίσωση των μεγεθών. Δηλ. 1=0,999…

Παρατηρήσεις και προβλήματα στην κατανόηση του αποτελέσματος: Είναι βέβαιο και απολύτως διαπιστωμένο ότι η κατανόηση της ισότητας, δεν είναι καθόλου προφανής, ούτε για φοιτητές μαθηματικών ,ούτε και για αποφοίτους Μαθηματικών τμημάτων. Προκαλεί δυσπιστία, αντιρρήσεις, αντιπαραθέσεις με έντονο θυμικό :«Δεν μοιάζει για σωστό». «Δεν μπορεί να είναι σωστό…» Δεκάδες κοινωνικά δίκτυα και φόρα παγκοσμίως ασχολούνται με αυτή την «παράδοξη ισότητα» που προκαλεί κατάπληξη. Αναζήτηση στην Google με λέξεις κλειδιά «0.999…» , «1=0.999..», «equal 1=0.999…» δίνει για μεν την πρώτη 9.390.000 αποτελέσματα για την δεύτερη 34.000 και για την τρίτη 8.540 αν βάλουμε «proof 1=0.999…» πάνω από 6.000 (αναζήτηση 9/9/2015) διαβάζοντας σχόλια, λάθη, παρατηρήσεις, πάνω στο όλον θέμα, παρατηρητέα είναι τα παρακάτω:

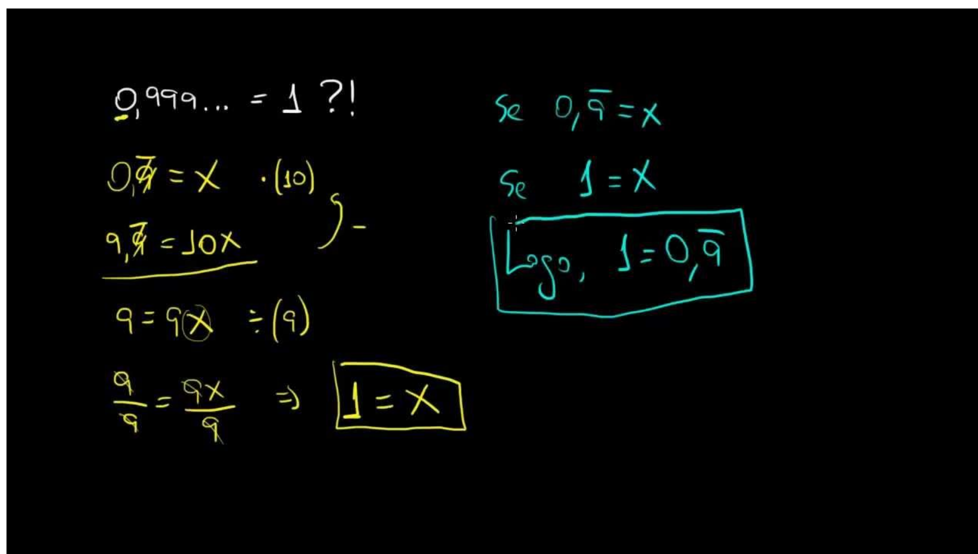
$$\underbrace{0,999\ldots}_{\omega} = 1 - \frac{1}{10^{\omega}}$$

Μια θεώρηση -κοίταγμα από πλευράς «τελειωμένου απείρου»

1 . Πυρήνας της όλης προβληματικής είναι η αδυναμία κατανόησης του απείρου ως προς την μία θεώρησή του. Αρχαιόθεν υπάρχουν δύο θεωρήσεις. Το «δυνάμει» άπειρο και το «εν ενεργεία» άπειρο. Κατά το πρώτο έχουμε πεπερασμένη μεταβλητή ποσότητα η οποία, όταν μεταβάλλεται, είναι δυνατό να ξεπεράσει κάθε όριο, ενώ κατά το δεύτερο θεωρούμε ότι υπάρχει αυτή τη στιγμή κάτι που έχει ήδη ξεπεράσει κάθε όριο. Στην ακολουθία των φυσικών αριθμών 1, 2, 3, ..., ν, ... ο γενικός όρος ν είναι μια μεταβλητή ποσότητα πάντοτε πεπερασμένη, αλλά τέτοια ώστε να μπορεί να ξεπεράσει οποιονδήποτε δοσμένο και ορισμένο θετικό αριθμό. Το πλήθος των όρων του συνόλου των φυσικών αριθμών, το οποίο είναι ένα ενιαίο όλο, το $\mathbb{N}$ μπορεί να χρησιμεύει ως παράδειγμα του «εν ενεργεία» απείρου. Κατά τον Αριστοτέλη το άπειρο υπάρχει μόνο «δυνάμει» και όχι «ενεργεία». Το αποτέλεσμα 0,999…=1 δίνει την εντύπωση (και φορμαλιστικά,

σημειολογικά) ότι κάποια εννιάρια αυξάνονται απεριόριστα πλησιάζοντας το 1 απεριόριστα, χωρίς όμως ποτέ να γίνεται ίσο με αυτό. Το ίδιο

επιστημολογικό-διδακτικό εμπόδιο έχουμε λ.χ. με την ακολουθία $\frac{1}{\nu} \to 0$



Απόδειξη στον πίνακα

αφού το πρώτο μέλος ποτέ δεν είναι μηδέν. Η μορφή $\lim_{\nu\to\infty}\frac{1}{\nu}=0$, ως ισότητα, χειροτερεύει το «παράδοξο» ενώ το διδακτικό αντιπαράδειγμα άρσης της παρανόησης του τύπου $\frac{(-1)^{\nu}}{\nu} \to 0$ (φθίνουσα ταλάντωση οσοδήποτε κοντά στο 0, εφ΄ όσον εξηγηθεί διεξοδικώς) αίρει μερικώς την παρανόηση και ίσως αίρεται τελικώς με την $\{\alpha_\nu\}$: $\alpha_\nu = \left\{\begin{matrix} \frac{1}{\nu} & \alpha\nu\ \nu = 2\kappa+1 \\ 0 & \alpha\nu\ \nu = 2\kappa \\ -\frac{1}{\nu} & \alpha\nu\ \nu = 2\kappa+2 \end{matrix}\right\}$ η οποία όμως είναι μια μη συνήθης μορφή ακολουθίας.

Ωστόσο, μια ισότητα αριθμών είναι πολύ πιο ευαίσθητη στην κριτική, παρ΄ότι το 0,999…=1 ,ουσιαστικά, δεν αφίσταται ποιοτικώς από το πιο

σύνηθες και οικείο αποτέλεσμα $\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2^{\nu}}=1$. Σε κάθε περίπτωση, όταν η σκέψη εγκλωβίζεται μόνο στην θεώρηση του απείρου ως δυνάμει, δεν μπορεί να δει το 0,999… ως 1, αλλά μόνο «ως απεριόριστα κοντά στο 1» και βεβαίως χωρίς να κατανοεί το νόημα των συνεπειών της φράσης εντός εισαγωγικών.

Ορισμός. (Συγκλιση Σειράς)

Εστω (a_k) ακολούθια πραγματικών αριθμών.

Ορίζουμε την ακολουθία των μερικών αθροισμάτων

$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$

Αν υπάρχει $s \varepsilon R$ ώστε $s_n \to s$ τότε λέμε ότι ο s είναι το αθροισμα της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ (ή αλλιώς λέμε οτι η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει στον s) και γράφουμε $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s$.

Ορισμός:

$$\underbrace{0.999\ldots9}_{n} = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots + \frac{9}{10^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k}$$

Ορισμός:

$$0.999\ldots = \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots + \frac{9}{10^n} + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$$ αν αυτό υπάρχει.

Απόδειξη:

$$\underbrace{0.999\ldots9}_{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} = \frac{9}{10}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{10}\right)^{k-1} = \frac{9}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}}$$

και έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{9}{10}\frac{1-\frac{1}{10^n}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{9}{10}\frac{1}{1-\frac{1}{10}} = 1$$

δηλαδή $s_n \longrightarrow 1$. Αφού i $s_n \longrightarrow 1$, με βάση τον ορισμό η i $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k}$ συγκλίνει στον 1

και $0.999\ldots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{9}{10^k} = 1.$

Μια αυστηρή απόδειξη!

2) Η γραφή 1=0,999…. αφορά διπλή αναπαράσταση ενός και του ιδίου αριθμού στο ίδιο σύστημα αρίθμησης πράγμα που θεωρείται ότι «δεν είναι δυνατόν να ισχύει». Βεβαίως μια ελάχιστη κλάση των ρητών μπορεί να αναπαρασταθεί με πεπερασμένη μορφή (μόνο οι λεγόμενοι και ως «δεκαδικοί», που δεκαδικοί, είναι της μορφής $A/(2^{\nu}5^{\mu})$ αναγώγου κλάσματος με $\nu,\mu \in \mathbb{N}$) ενώ «σχεδόν όλοι» οι ρητοί παριστάνονται με άπειρη περιοδική μορφή. Αλλά και οι περατούμενοι δεν ξεφεύγουν από την απειρομορφή, αφού λ.χ. 1,2=1,1999… Φυσικά για τους αρρήτους, ούτε λόγος!

3) Και στις παραπάνω αποδείξεις που παραθέτουμε, υπάρχουν σοβαρές επιστημονικές αντιρρήσεις καθώς πράξεις με απειροπαραστάσεις γενικώς στα Μαθηματικά, δεν επιτρέπονται. Ο λόγος είναι, ότι για να χειριστείς αλγεβρικά μια απειρο-παράσταση (εδώ σειρές) αυτή θα πρέπει να εκφράζει κάποιον συγκεκριμένο αριθμό, όπως λέμε να συγκλίνει. Ιστορικά είναι γνωστή η «Σειρά του Grandi» $\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu}$, [4] , όπου μόνο με χρίση επιμεριστικής ιδιότητας της πρόσθεσης δίνει διαδοχικώς ως «αποτέλεσμα» 0, 1 ή και ½ Φυσικά, δεν έχει νόημα αριθμού ως αποκλίνουσα σειρά. Οπωσδήποτε όμως, κάποιοι που έχουν ακούσει κάποια ανώτερα Μαθηματικά, γνωρίζουν ότι η απειροπαράσταση 0,999… θέλει προσεκτικότερο χειρισμό, καθώς εκ πρώτης όψεως δεν μοιάζει για αριθμός, υπάρχουν ενστάσεις κατά πόσον μπορούμε να κάνουμε απειροπροσθέσεις, απειροδιαιρέσεις , όταν όλα, τα έχουμε συνηθίσει να τα εκτελούμε στο πλαίσιο του πεπερασμένου.

Συμπεράσματα: Το όλον θέμα, αναδεικνύει ότι οι άνθρωποι έχουν μεγαλύτερη εμπιστοσύνη στην διαίσθησή τους, παρά στην μαθηματική απόδειξη. Αυτό ισχύει και για μυημένους λιγότερο ή περισσότερο στα Μαθηματικά. Φαίνεται ακόμη ότι τα νοητικά μοντέλα που έχουν οι άνθρωποι για τις μαθηματικές έννοιες και αντικείμενα είναι ενίοτε δομικά ατελή και υπάρχει ανάγκη βελτίωσής τους από την διδακτική των Μαθηματικών, εφ΄όσον είναι τελικά εφικτό αυτό, δεδομένου ότι κάποια που εδράζονται στην κατανόηση άπειρων και απειροστών είναι εξαιρετικά δυσνόητα όχι στο μαθηματικό τους μέρος, αλλά στο διαισθητικό. Σε κάθε όμως περίπτωση, οι εκτεταμένες έντονες συζητήσεις για Μαθηματικά θέματα είναι κάτι που είναι μόνο χρήσιμο για τα ίδια τα Μαθηματικά και για τους χρήστες τους, ενώ τελικά το σωστό νικά το λάθος, όσο κι αν το τελευταίο επιμένει!

Summary : The 0,999...=1 equivalence is an issue of student internet discussions and far beyond. The mentioned parity (equivalence) is stubbornly doubted. Even specific mathematical proofs are not persuasive. It seems that the difficulty in the intuitive comprehension of the infinite, indicates the limits of the finite nature of human beings while at the same time the power as well as the practical value of mathematical proofs are highlighted

Βιβλιογραφία:

[1] Wikipedia . Λήμμα : «0.999…» Διάθεση: https://el.wikipedia.org/wiki/0,999...

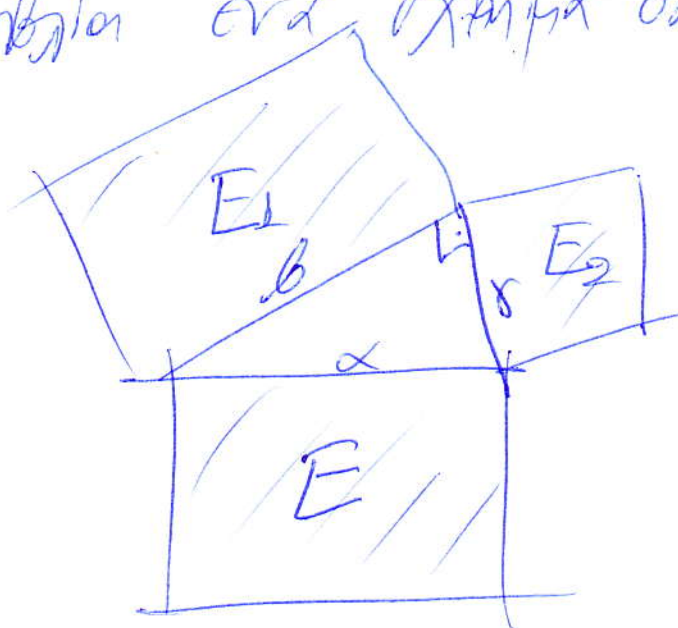
[2] Bogomonly Alexander :Άρθρο : «.999…=1?» διατίθεται: http://www.cut-the-knot.org/arithmetic/999999.shtml

[3] Kalid Azad . Άρθρο με συζήτηση: «A Friendly Chat About Whether 0.999.. = 1»Διάθεση: http://betterexplained.com/articles/a-friendly-chat-about-whether-0-999-1

[4] Wikipedia. Λήμμα: «Grandi's series» Διατίθεται : https://en.wikipedia.org/wiki/Grandi's_series

Σχόλιο σε μια απόδειξη γενίκευσης ~~επέκτασης~~ του Πυθαγορείου Θεωρήματος

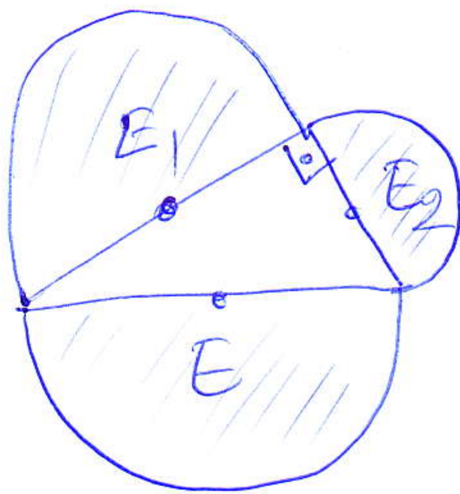
<u>Προλεγόμενα:</u> Το Π.Θ. επί δεκαετίες εδιδάσκετο στρεβλά στην Ελλάδα με έμφαση στην αλγεβρική σχέση και όχι στην πρωτογενή σχέση εμβαδών. Μόνο τα τελευταία χρόνια μπήκε στα βιβλία ένα σχήμα σαν το παρακάτω:



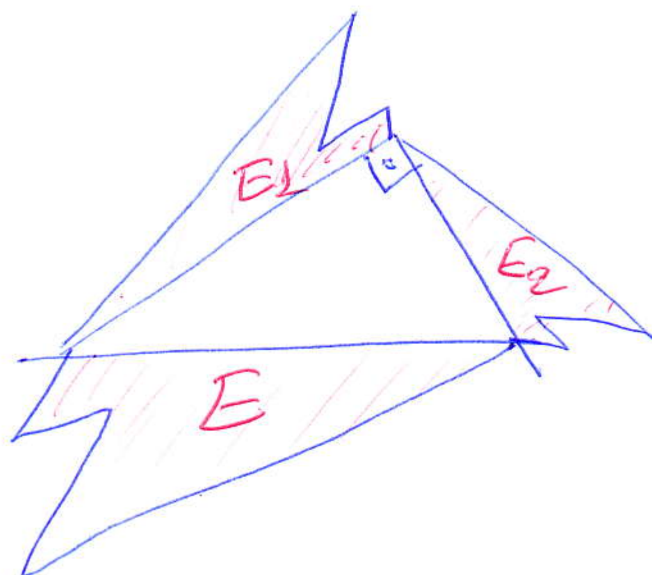
$E_1 + E_2 = E$

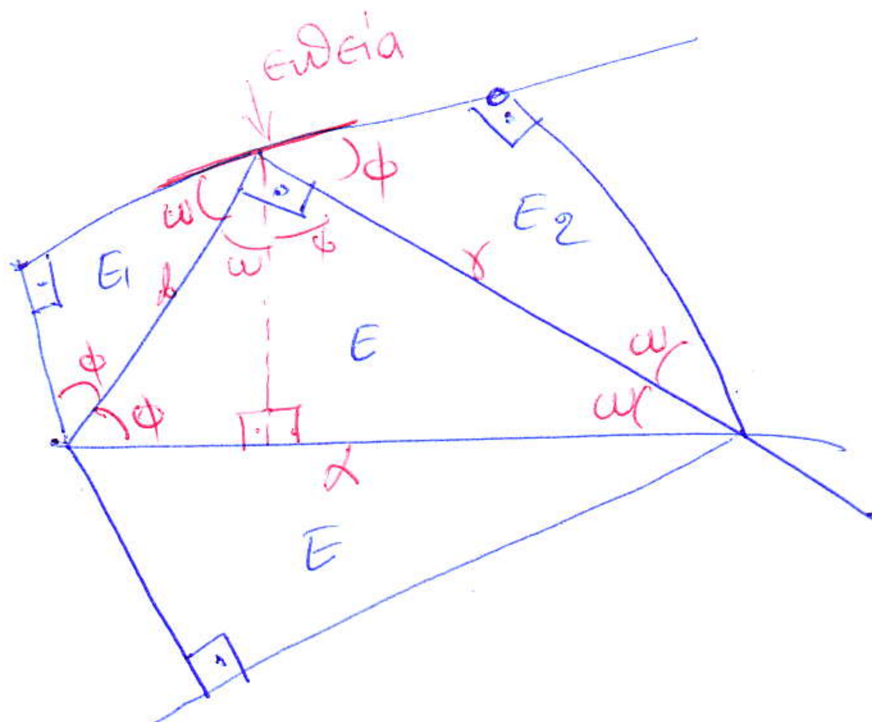
$\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$

Βεβαίως, αντί για τετράγωνα, μπορούν να μπουν οποιαδήποτε σχήματα (όμοια) κυρτά ή μη κυρτά και να ισχύει η πρωτογενής εμβαδική σχέση. Αυτή ήταν η θεώρηση του Πυθαγορείου Θεωρήματος που μάλλον διδακτικά έχει αποκατασταθεί.



$E_{1\,ημικυκλ} + E_{2\,ημικυκλ} = E_{ημικυκλ}$





Το τελευταίο σχήμα, είναι η πλέον εύλογη περίπτωση που μπορεί να σκεφθεί κάποιος ως επέκταση (και απόδειξη) ότι μια απλή δίπλωση (ανάκλαση) περί τις κάθετες καλύπτει το αρχικό ορθογώνιο τρίγωνο. Έτσι:

Επειδή ο λόγος εμβαδών ομοίων σχημάτων ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας θα έχω:

$$\frac{E_1}{E} = \frac{\beta^2}{\alpha^2}, \quad \frac{E_2}{E} = \frac{\gamma^2}{\alpha^2}$$ απ' όπου

με πρόσθεση κατά μέλη, έχω

$$\frac{E_1+E_2}{E} = \frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2} = 1$$ (1, διότι έχω

την γνωστή ισότητα-κάλυψη των δύο μερών ορθογωνίων τριγώνων λόγω ομοιότητας.

Και όταν το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο τι γίνεται;

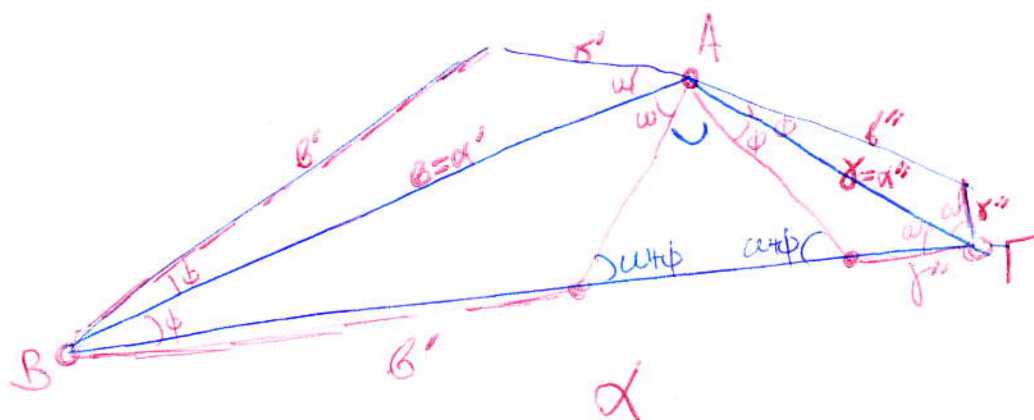
Η εύλογη απορία. Και εδώ οι Αρχαίοι Έλληνες θα επιχειρούσαν να «διπλώσουν» τα εξωτερικά τρίγωνα, αλλά δεν θα είχαμε ακριβώς κάλυψη του αρχικού τριγώνου. Αν η

$\hat{A} > 90°$ δεν θα είχαμε κάλυψη

αν $\hat{A} < 90°$ θα είχαμε υπερ-κάλυψη

Σε κάθε περίπτωση θα είχαμε δημιουργία ενός ισοσκελούς τριγώνου που θα έπρεπε κατά περίπτωση να αφαιρεθεί ή να προστεθεί

Ενώ στην περίπτωση όπου $\hat{A}=90^\circ$ το ισοσκελές έχει «εκφυλιστεί» σε ευθύγραμμο τμήμα (το ύψος επί την υποτείνουσα)



Από όμοια τρίγωνα, έχω διαδοχικά:

- $\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta'}{\beta} \Rightarrow \beta^2=\alpha\beta'$ (1)
- $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma''}{\gamma} \Rightarrow \gamma^2=\alpha\gamma''$ (2)

Με πρόσθεση των (1), (2) έχω την σχέση

$\beta^2+\gamma^2=\alpha(\beta'+\gamma'')$, που αποτελεί

γενίκευση του Π.Θ. (π.χ. μπορεί τριγωνομετρικά να αποδειχθεί ότι $\frac{\beta'+\gamma''}{\alpha}=\frac{E_{ισοσκ.}}{E_{ολικ.}}=\frac{-2\beta\gamma\,συνA}{\alpha^2}$ (*)

και η γενίκευση να πάρει την μορφή την γνωστή ως θεώρημα συνημιτόνων.

(*) ($E=E_1+E_2+E_{ισοσκ} \xrightarrow{\text{(με διαίρεση με E)}} 1=\frac{E_1+E_2}{E}+\frac{E_{ισοσκ}}{E} \Rightarrow \dots$)

Το προηγούμενο, αποδίδεται σε έναν Άραβα ονόματι Thebit / Thebith / Tebit όπως είναι αποδόσεις του επωνύμου του στα Λατινικά.

Αυτός λοιπόν, έζησε στην Βαγδάτη γύρω στο 850 μ.Χ. ήξερε άπταιστα Ελληνικά αφού μετέφρασε Ευκλείδη, Αρχιμήδη, Απολλώνιο και Πτολεμαίο στα Αραβικά.

Χωρίς άλλες βιογραφικές λεπτομέρειες, τα ερωτήματα τίθενται νομοτελειακά:

- Δεν το είχαν ανακαλυφθεί αυτό οι Αρχαίοι Έλληνες, που έβλεπαν εμβαδικά αυτές τις σχέσεις;
- Η γενίκευση, είναι η πρώτη κίνηση ενός μαθηματικού, όταν ανακαλύπτει ένα θεώρημα. Δεν το επεχείρησε κανείς και το βρήκε μετά από πολλούς αιώνες ο Thebit;
- Είναι απίθανο να πεισθεί κάποιος ότι θα το είχαν βρει οι Έλληνες μεγάλοι μαθηματικοί και ότι -τελικά- ο Thebit ήταν κάτοχος ενός ακόμα έργου ή τμήματος αρχαίου χειρογράφου που πλέον έχει χαθεί.—

ΓΙΑΝΝΗΣ Π. ΠΛΑΤΑΡΟΣ